

Komplexe Zahlen

Tobias Brinkert
eMail: <t.brinkert@semibyte.de>
Homepage: <www.semibyte.de>

21.05.2005
Version: 1.1

Inhaltsverzeichnis

1. Die imaginäre Einheit i

Da eine Zahl, mit sich selbst multipliziert, niemals (-1) ergeben kann, hat man die Beziehung dieser Operation

$$i^2 = -1 \quad \left[i = \sqrt{-1} \right]$$

geschrieben und nennt i die imaginäre Einheit. So findet man als Lösung der quadratischen Gleichung

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 10 &= 0 \\ x_{1;2} &= 3 \pm \sqrt{9 - 10} \\ x_{1;2} &= 3 \pm i \end{aligned}$$

Man kann leicht zeigen, daß $x_1 = 3 + i$ und $x_2 = 3 - i$ Lösungen obiger Gleichungen sind:

$$\begin{aligned} 1. \quad & (3 + i)^2 - 6 \cdot (3 + i) + 10 = 0 \\ & 9 + 6i + i^2 - 18 - 6i + 10 = 0 \\ & (6i) \text{ und } (-6i) \text{ ergänzen sich zu } 0 \text{ und für } i^2 \text{ kann } -1 \text{ gesetzt werden;} \\ & 9 - 1 - 18 + 10 = 19 - 19 = 0 \\ 2. \quad & (3 - i)^2 - 6 \cdot (3 - i) + 10 = 0 \\ & 9 - 6i + i^2 - 18 + 6i + 10 = 0 \\ & 9 - 1 - 18 + 10 = 19 - 19 = 0 \end{aligned}$$

Man nennt jede Zahl als Summe aus einer reellen a und einer imaginären $i \cdot b$ eine komplexe Zahl (Z).

$$Z = a + b \cdot i$$

2. Addition und Subtraktion komplexer Zahlen

Zwei komplexe Zahlen werden addiert (subtrahiert), indem ihre Realteile addiert (subtrahiert) und getrennt hiervon ihre Imaginärteile addiert (subtrahiert) werden:

$$\begin{aligned} Z_1 &= 4 + 3i & Z_2 &= -2 + i & \Rightarrow Z &= Z_1 + Z_2 = 2 + 4i \\ Z_1 &= a_1 + b_1 i & Z_2 &= a_2 + b_2 i & \Rightarrow Z &= Z_1 + Z_2 = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2) i \end{aligned}$$

3. Multiplikation komplexer Zahlen

Man verwendet die Regel zur Multiplikation zweier Summen:

$$\begin{aligned} Z_1 &= 3 - i & Z_2 &= -2 + 3i & \Rightarrow Z &= Z_1 \cdot Z_2 = (3 - i) \cdot (-2 + 3i) \\ & & & & Z &= -6 - 3i^2 + 2i + 9i \\ & & & & Z &= -6 - 3 \cdot (-1) + 11i \\ & & & & Z &= -3 + 11i \\ Z_1 &= a_1 + b_1 i & Z_2 &= a_2 + b_2 i & \Rightarrow Z &= Z_1 \cdot Z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i \end{aligned}$$

Wenn zwei komplexe Zahlen sich nur durch das Vorzeichen des Imaginärteils unterscheiden, ist das Ergebnis eine reelle Zahl:

$$(4 + 3i)(4 - 3i) = 16 - 9i^2 = 25$$

$$(-2 + i)(-2 - i) = 4 + 1 = 5$$

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2$$

Man nennt zwei sich derart unterscheidende komplexe Zahlen zueinander konjugiert komplexe Zahlen.

4. Division komplexer Zahlen

Mit $Z_1 = a_1 + b_1i$ und $Z_2 = a_2 + b_2i$ erhält man:

$$Z = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} = \frac{(a_1 + b_1i)(a_2 - b_2i)}{(a_2 + b_2i)(a_2 - b_2i)}$$

Man erweitert also den Bruch mit dem konjugiert komplexen Nenner und erhält:

$$Z = \frac{a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)i}{a_2^2 - b_2^2}$$

$$Z = \frac{a_1a_2 - b_1b_2}{a_2^2 - b_2^2} + \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_2^2 - b_2^2}i$$

5. Potenzen imaginärer und komplexer Zahlen

Spezielle Potenzen sind:

$$\begin{array}{lll} i^2 = -1 & i^3 = -i & (1+i)^2 = 2i \\ i^4 = 1 & i^5 = i & (1+i)^4 = -4 \\ i^6 = -1 & i^7 = -i & (1+i)^6 = -8i \\ i^8 = 1 & i^9 = i & (1+i)^8 = 16 \end{array}$$

Man erkennt, dass reine reelle und reine imaginäre Lösungen möglich sind. Man kann also beim Rechnen mit komplexen Zahlen durchaus in den uns anschaulich zugänglichen Raum der reellen Zahlen »zurückkehren«, was den Umgang mit den komplexen Zahlen etwas freundlicher gestaltet.

6. Wurzeln komplexer Zahlen

Solange man im Bereich der reellen Zahlen bleibt, sind nur bestimmte Wurzeln möglich:

$$\sqrt[3]{8} = 2 \quad \sqrt{4} = \pm 2 \quad \sqrt[3]{-27} = -3$$

Bestenfalls existieren Doppellösungen. Die Lösungen im Bereich der komplexen Zahlen bieten dagegen ein völlig anderes Bild. Vor allem wird der Lösungsraum erweitert.

Da nämlich

$$Z^{(1/n)} = |Z|^{(1/n)} \left[\cos \left(\alpha \frac{1}{n} \right) + \sin \left(\alpha \frac{1}{n} \right) \right]$$

existieren immer n Lösungen, auch z. B. im Fall $\sqrt[3]{8}$, da

$$\begin{aligned} 8 &= 8 (\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ) \\ 8 &= 8 (\cos 360^\circ + i \sin 360^\circ) \\ 8 &= 8 (\cos 720^\circ + i \sin 720^\circ) \text{ und somit} \\ \sqrt[3]{8} &= 2 \\ \sqrt[3]{8} &= 2 (\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) = -1 + i\sqrt{3} \text{ und} \\ \sqrt[3]{8} &= 2 (\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ) = -1 - i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

7. Multiplikation einer komplexen Zahl mit ihrer konjugiert komplexen

Sei Z die Komplexe, Z^* die konjugiert komplexe, so ist

$$Z \cdot Z^* = r^2$$

In der Schreibweise mit Polarkoordinaten wäre

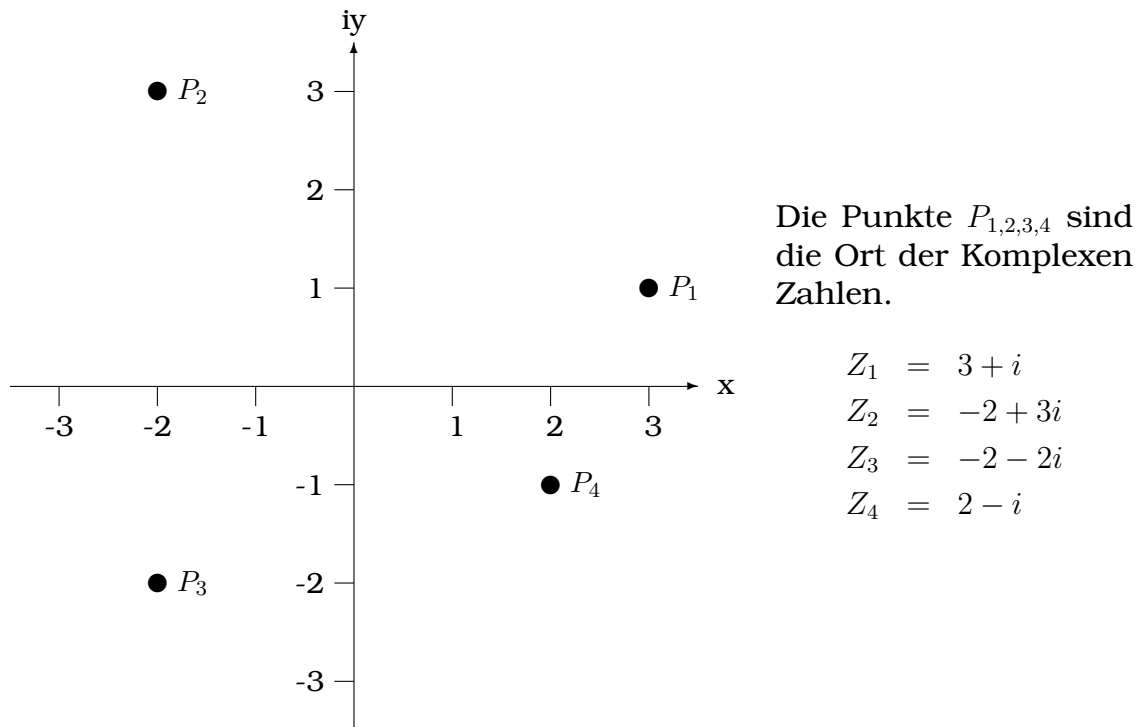
$$Z = r (\cos \alpha + i \sin \alpha) \text{ und } Z^* = r [\cos (-\alpha) + i \sin (-\alpha)]$$

und somit

$$Z \cdot Z^* = r^2 [\cos (\alpha - \alpha) + i \sin (\alpha - \alpha)] = r^2$$

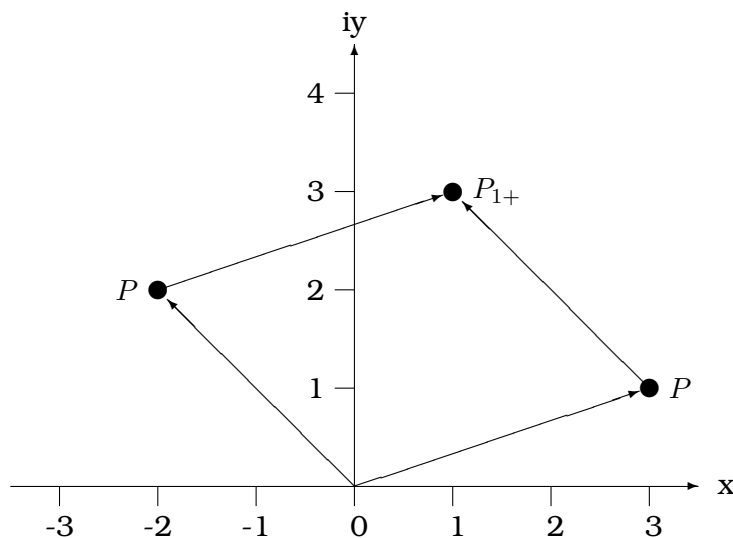
8. Die Gauß'sche Zahlenebene

Komplexe Zahlen und ihre Operationen sind anschaulich darstellbar in einem Koordinatensystem mit reell belegter x-Achse und imaginär skaliert y-Achse.



Die Addition zweier Zahlen ergibt ein einfaches geometrisches Bild, wie das Beispiel $Z_1 + Z_2$ zeigt. Zeichnet man Pfeile vom Ursprung zu den Zahlen Z_1 und Z_2 gehörenden Punkten, so spannen diese ein Parallelogramm mit einer solchen, vom Ursprung ausgehenden Diagonalen auf, die zum Punkt der Zahlen führt, die die Summe darstellt:

$$Z_1 + Z_2 = 3 - 2 + i + 2i = 1 + 3i.$$



Die Negation einer Zahl erhält man durch Multiplikation mit (-1) .

$$Z = a + bi; \quad -Z = -a - bi$$

In der Gauß'schen Zahlenebene erhält man zwei gleich lange, in entgegengesetzter Richtung weisende Pfeile. Da diese beiden Pfeile kein Parallelogramm mehr aufspannen, existiert keine Diagonale mehr, d. h. die Summe ist Null:

$$Z_1 + Z_2 = Z_1 + (-Z_1) = 0$$

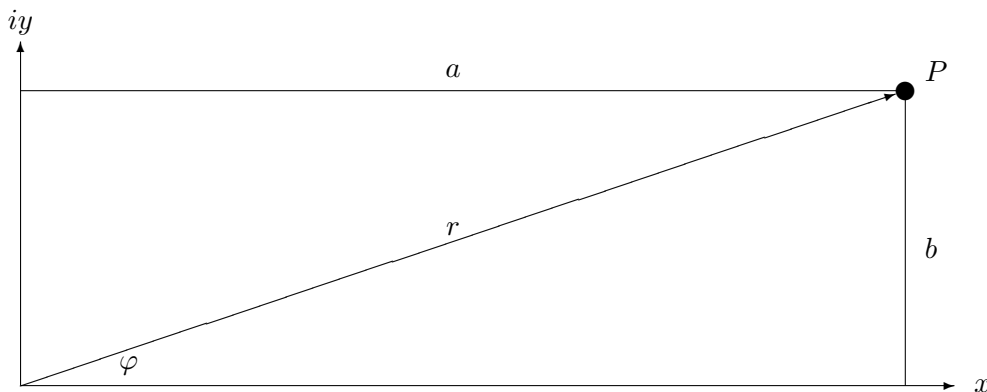
9. Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen

Eine komplexe Zahl, als Punkt in der Gauß'schen Zahlenebene dargestellt, hat vom Ursprung den Abstand

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{bei} \quad Z = a + bi$$

Man nennt r den Betrag der Zahl Z : $r = |Z|$. Der Winkel φ , der die Richtung zum Punkt für Z angibt, ist

$$\tan \varphi = \frac{b}{a} \quad ; \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



Damit kann man

$$Z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

schreiben, da

$$a = r \cos \varphi \quad \text{und}$$

$$b = r \sin \varphi \quad \text{ist.}$$

Diese neue Schreibweise hat den Vorteil, daß man sofort die Lage des zugehörigen Punktes in der Gauß'schen Zahlenebene ansehen kann. In der Komponentenschreibweise kann man immerhin anhand der Vorzeichen von Realteil und Imaginärteil den Quadranten erschließen (1. Quadrant: $0^\circ - 90^\circ$, 2. Quadrant: $90^\circ - 180^\circ$, 3. Quadrant: $180^\circ - 270^\circ$, 4. Quadrant: $270^\circ - 360^\circ$).

a	>0	<0	<0	>0
b	>0	>0	<0	<0
	1. Q.	2. Q.	3. Q.	4. Q.

10. Algebraische Darstellung der Multiplikation in der Gauß'schen Ebene

Mit den Zahlen $Z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ und $Z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ wird das Produkt

$$Z = r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)).$$

Aus der Trigonometrie sind aber die goniometrischen Formeln

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \text{ und} \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \text{ bekannt, so da\ss}\end{aligned}$$

$$Z = Z_1 Z_2 = r_1 r_2 [\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)].$$

Man erhält also das Produkt, indem die Abstände miteinander multipliziert und die Richtungen, bezogen auf die x-Achse, addiert werden. Durch Umkehrschluß kommt man leicht zur Division:

$$Z = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)]$$

und zum Kehrwert:

$$\begin{aligned}\frac{1}{Z} &= \frac{1}{r} [\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)] \\ \frac{1}{Z} &= \frac{1}{r} [\cos \alpha - i \sin \alpha]\end{aligned}$$

Liste der Versionen

Version	Datum	Bearbeiter	Bemerkung
0.9		Bri	Dokumenterstellung
1.0	14.12.2004	Bri	EDV-Satz des Dokuments
1.1	21.05.2005	Bri	Adressänderungen aufgrund Domainwechsel