Aussagenlogik

Tobias Krähling
eMail: <Tobias.Kraehling@semibyte.de>
Homepage: <www.semibyte.de>

27.11.2010
Version 1.1

Zusammenfassung

Im vorliegenden Dokument soll die Potenzsummenformel

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{n^{k+1}}{n+1} + \frac{n^k}{2} + \sum_{j=2}^{k} a_{j,1} \frac{n^{k+1-j} k!}{j\,(k+1-j)!}$$

in einzelnen Schritten ermittelt und hergeleitet werden. Hierbei wird beim einfachsten Zusammenhang mit $k = 0$ begonnen und die Formel und Beweisführung für höhere k-Ebenen weiter ausgeführt. Zum Einsatz kommt u. a. das Koeffizientenschema.

Inhaltsverzeichnis

1 Summenformel für k = 0 und k = 1

Die einfachsten Beziehungen erhält man, wenn von $k = 0$ ausgegangen wird:

$$\sum_{i=1}^{n} i^0 = 1 + 1 + \ldots + 1 = n$$

Dies erkennt man ohne eine Formel zu wissen oder herleiten zu müssen.

Auch im Falle $k = 1$ findet man schnell einen Zusammenhang:

$$\begin{array}{rcl}
\sum_{i=1}^{n} i^1 & = & 1 + 2 + 3 + \ldots + n \\
\sum_{i=1}^{n} i^1 & = & n + (n-1) + (n-2) \ldots + 1 \\
\hline
2\sum & = & (n+1) + (n+1) + (n+1) \ldots + (n+1) \\
\sum_{i=1}^{n} i^1 & = & \frac{1}{2} n\,(n+1) \\
\sum_{i=1}^{n} i^1 & = & \frac{1}{2} n + \frac{1}{2} n^2 \\
\hline\hline
\end{array}$$

1.1 Beweis durch vollständige Induktion

In allen logischen Ketten, in denen man von einem bezeichneten Zustand n zu einem ebensolchen Zustand $n + 1$ gelangen und bei n_{min} beginnen kann, kann die Gültigkeit der Schlüsse durch vollständige Induktion bewiesen werden.

Hierzu kann das zweite Beispiel des vorherigen Punktes dienen.

a) Man prüft, ob die Formel für $n_{min} = 1$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

b) Da (a) positiv ausfiel, untersucht man nunmehr den Übergang von n nach $n + 1$:

$$\begin{array}{rcl}
\sum_{i=1}^{n} i + (n+1) & = & \sum_{i=1}^{n+1} i \\
\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 + n + 1 & = & \frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{2}(n+1)^2 \\
\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 + n + 1 & = & \frac{1}{2}n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}2n + \frac{1}{2} \\
\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}3n + 1 & = & \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}3n + 1
\end{array}$$

2 Der Übergang zur nächst höheren Summenformel für k = 2

Was ergibt sich als Formel für

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + \ldots + n^2$$

1. Überlegung: Bisher sind nur n und n^2 jeweils mit dem Faktor 2^{-1} in der 2. Formel und n mit dem Faktor 1 in der einfachsten Formel vorgekommen.

2. Überlegung: Für $k = 0$ tauchte $n = n^1$, für $k = 1$ tauchte n^2 als höchste Potenz auf. Sollte die höchste Potenz $p_{max} = k + 1$ sein?

Die beiden Überlegungen führen zu einem Ansatz, der einen Versuch darstellt:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = a_{2,1}n + a_{2,2}n^2 + a_{2,3}n^3$$

Die erste Tiefzahl an a gibt k an, die zweite die Nummer des Summanden.

3. Überlegung: Einleuchtend ist, dass ein konstanter Summand $a_{2,0}$ hier nicht (und nie) existiert, weil

$$\sum_{i=1}^{i} i^k = 1$$

immer gelten muss.

Die niedrigen Werte für $n = 1,2,3$ sind leicht zu berechnen. Dann sind die Faktoren $a_{2,1}$, $a_{2,2}$ und $a_{2,3}$ die Unbekannten:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{i} i^2 &= 1 &&= a_{2,1} + a_{2,2} + a_{2,3} \\
\sum_{i=1}^{i} i^2 &= 5 &&= 2a_{2,1} + 4a_{2,2} + 8a_{2,3} \\
\sum_{i=1}^{i} i^2 &= 14 &&= 3a_{2,1} + 9a_{2,2} + 27a_{2,3}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl}
1 & = & a_{2,1} + a_{2,2} + a_{2,3} \\
5 & = & 2a_{2,1} + 4a_{2,2} + 8a_{2,3} \\
14 & = & 3a_{2,1} + 9a_{2,2} + 27a_{2,3} \\
\hline
3 & = & 2a_{2,2} + 6a_{2,3} \\
11 & = & 6a_{2,2} + 24a_{2,3} \\
\hline
2 & = & 6a_{2,3} \\
\hline
 & & a_{2,1} = \frac{1}{6} \quad a_{2,2} = \frac{1}{2} \quad a_{2,3} = \frac{1}{3} \\
\hline\hline
\end{array}$$

Demnach wäre

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3$$

2.1 Versuch des endgültigen Beweises der Formel

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3$$

Sie gilt sicher für $i = 1,2,3$. Gilt sie auch für $i > 3$, d. h. für $i = 4,5,6\dots$?

Beweis durch vollständige Induktion:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 + (n+1)^2 &\stackrel{?}{=} \frac{1}{6}(n+1) + \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{3}(n+1)^3 \\
\frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 + n^2 + 2n + 1 &= \frac{1}{6}n + \frac{1}{6} + \frac{1}{2}n^2 + n + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}(n+1)^3 \\
\frac{1}{3}n^3 + n^2 + n + \frac{1}{3} &= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{3}3n^2 + \frac{1}{3}3n + \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Der versuchte Ansatz führte zum Ziel. Die erhaltene Formel ist richtig, sie gilt für alle i. Zum Beispiel ist

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = \frac{1}{6}\cdot 5 + \frac{1}{2}\cdot 25 + \frac{1}{3}\cdot 125 = (5 + 75 + 250)\,\frac{1}{6} = 55$$

Eine Pyramide aus Kugeln, deren untere Lage $5 \cdot 5 = 25$ Kugeln, deren nächste dann $4 \cdot 4 = 16$ und deren letzte Lage, die Spitze, nur noch eine Kugel $(1 \cdot 1)$ enthielte, benötigt insgesamt 55 Kugeln.

2.2 Vergleich der Ergebnisse

$$\begin{aligned}
\sum i^0 &= 0 \\
\sum i^1 &= \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 \\
\sum i^2 &= \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3
\end{aligned}$$

Die drei Überlegungen in Abschnitt 2 führten zu einem richtigen Ergebnis.

1. Es gibt Summanden von n bis n^3.
2. Die höchste Potenz ist $p_{max} = 3 = k + 1$.
3. Ein n-freier Summand existiert nicht.

Man entdeckt hier eine wichtige Verhaltensweise, die beim Beweisen in der Mathematik nötig ist. Man erspart sich viel Arbeit und vielleicht wird auch der Spaß größer, wenn man zunächst, von einfachsten ausgehend, rein bildhaft die Fortentwicklung einer Formel zu erspähen sucht. Um den Beweis kann man sich nicht drücken, aber die schlüssige Herleitung einer Formel wie im Falle $k = 1$ schon durch Gauß kann und wird auch bei höheren k-Werten wesentlich schwieriger sein.

3 Der Übergang zu k = 3

Auf dem im 2.2. Abschnitt beschriebenen Weg sollte man fortschreiten. Dann ließe sich folgender Formelaufbau für $k = 3$ vermuten:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} i^3 &= a_{3,1}n + a_{3,2}n^2 + a_{3,3}n^3 + a_{3,4}n^4 \\ \sum_{i=1}^{n} i^3 &= a_{3,1}n + a_{3,2}n^2 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^4\end{aligned}$$

Die höchste Potenz scheint nämlich den Faktor $(k+1)^{-1}$ und die nächste Potenz den Faktor 2^{-1} bei sich zu haben. Nur zwei Unbekannte wären zu suchen: $a_{3,1}$ und $a_{3,2}$.

$$\begin{array}{rcccl} \sum_{i=1}^{1} i^3 & = & 1 & = & a_{3,1} + a_{3,2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\ \sum_{i=1}^{2} i^3 & = & 9 & = & 2a_{3,1} + 4a_{3,2} + 4 + 4 \\ \hline & & 7 & = & 2a_{3,2} + 8 - 1 - \frac{1}{2} \\ \hline & & & & a_{3,2} = \frac{1}{4} \quad a_{3,1} = 0 \\ \hline \end{array}$$

Demnach wäre:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^4$$

Der Beweis soll durch vollständige Induktion unternommen werden.

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^4 + (n+1)^3 & = & \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^4 + n^3 + 3n^2 + 1 \\ \frac{1}{4}(n+1)^2 + \frac{1}{2}(n+1)^3 + \frac{1}{4}(n+1)^4 & = & \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{4}2n + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{2}3n^2 + \frac{1}{2}3n \\ & & +\frac{1}{2} + \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{4}4n^3 + \frac{1}{4}6n^2 + \frac{1}{4}4n + \frac{1}{4} \\ \hline \text{Gleichung 1} & = & \text{Gleichung 2} \\ \frac{1}{4}n^2 + 3n^2 & = & \frac{1}{4}n^2 + 3\frac{1}{2}n^2 + 3\frac{1}{2}n^2 \\ 3n & = & \frac{1}{2}n + 3\frac{1}{2}n + n \\ 1 & = & \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\ 1 & = & 1 \end{array}$$

3.1 Zusammenfassen der Ergebnisse

$$\begin{aligned}
\sum i^0 &= 0\\
\sum i^1 &= \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2\\
\sum i^2 &= \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3\\
\sum i^3 &= \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^4
\end{aligned}$$

1. Das Nichterscheinen eines n-Summanden war nicht zu erwarten.
2. Der Faktor bei n^2 kann noch nicht verstanden werden.
3. Der Faktor für die Potenz k bleibt weiterhin 2^{-1}.
4. Der Faktor für die höchste Potenz ist in der Tat $(k+1)^{-1}$.

Vermutung: Die Entwicklung der Faktoren geschieht entlang einer Diagonalen von links oben nach rechts unten im obigen Schema.

- In der 1. Diagonalen werden die Nenner größer: 1,2,3,4 ...
- In der 2. Diagonalen sind die Nenner gleich: 2,2,2 ...
- In der 3. Diagonalen fallen die Nenner: 6,4 ...

Noch ist keine weitere Aussage möglich. wenn auch noch richtig sein sollte, daß die vierte Diagonale überhaupt ausfällt, wäre der Ansatz:

$$\sum_1^n i^4 = a_{4,1}n + 0 + a_{4,3}n^3 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{5}n^5$$

vernünftig. Man hätte wieder nur zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten zu lösen.

4 Die Formel für k = 4

$$\begin{aligned}
\sum_1^1 i^4 &= 1 = a_{4,1} + a_{4,3} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5}\\
\sum_1^2 i^4 &= 17 = 2a_{4,1} + 8a_{4,3} + 8 + 32\tfrac{1}{5}\\
\hline
& a_{4,3} = \tfrac{1}{3} \quad a_{4,1} = -\tfrac{1}{30}
\end{aligned}$$

Dann müsste für $k = 4$ geschrieben werden:

$$\sum_1^n i^4 = -\frac{1}{30}n + 0 + \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{5}n^5$$

Die drei Vermutungen des vorigen und die eine am Anfang dieses Absatzes sind allesamt eingetroffen, so dass auch die Formel für $k = 4$ zunächst probiert und dann bewiesen werden sollte.

5 Das Koeffizienten-(Faktoren-)-Schema von k = 0 bis k = 4

k	j					
	1	2	3	4	5	
0	1					
1	2^{-1}	2^{-1}				
2	6^{-1}	2^{-1}	3^{-1}			
3	0	4^{-1}	2^{-1}	4^{-1}		
4	-30^{-1}	0	3^{-1}	2^{-1}	5^{-1}	
		$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	
			D_4	D_3	D_2	D_1

Ohne die Formel für $k = 4$ schon bewiesen zu haben, scheint hier die Entwicklung der Diagonalen D_1, D_2 und D_4 sichtbar zu sein. Andere Richtungen (Zeilen, Spalten) schienen »kein Angebot« zu machen.

$$
\begin{array}{llllll}
D_1: & a_{0,1} & a_{1,2} & a_{2,3} & a_{3,4} & a_{4,5} \\
 & 1 & 1\cdot\frac{1}{2} & 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{3} & 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{3}\cdot 3\cdot\frac{1}{4} & 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{3}\cdot 3\cdot\frac{1}{4}\cdot 4\cdot\frac{1}{5} \\
D_2: & a_{1,1} & a_{2,2} & a_{3,3} & a_{4,4} & \\
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{1}{3} & \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{1}{3}\cdot 4\cdot\frac{1}{4} & \\
D_3: & a_{2,1} & a_{3,2} & a_{4,3} & & \\
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & & \\
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\cdot 3\cdot\frac{1}{2} & \frac{1}{6}\cdot 3\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{1}{3} & & ?
\end{array}
$$

Durch das praktische nummerieren mit zwei Tiefzahlen wird seltsamerweise der Entwicklungsmechanismus sichtbar:

$$
\begin{array}{lll}
a_{m,n} & & \\
\searrow & \Rightarrow & a_{m+1,n+1} = a_{m,n} = \dfrac{m+1}{n+1} \\
\quad a_{m+1,n+1} & &
\end{array}
$$

Nichts ist bewiesen. Dennoch mache man sich klar, dass man beim Eindringen in den Formalmechanismus von niedrigen k-Werten her zunächst einfache Regelmäßigkeiten (z. B. $n^{k+1}\,(k+1)^{-1}$) entdeckte und nun plötzlich einen Übergangsformalismus hat, der das gesamte Faktorenschema umfasst. Während man also eine Formel für ein bestimmtes k zu beweisen hatte, als man die Untersuchung begann, liegt nun das gesamte Schema, ob bewiesen oder nicht, bis zu beliebigem k vor. Nur die Start-Faktoren $a_{k,1}$ müssen über die durch die Zeilen mit niedrigerem k bekannt gewordenen $a_{k,j}$ mit $j = 2$ bis $j = k + 1$ berechnet werden.

6 Das Koeffizientenschema

Man erkennt sofort, dass die Regelmäßigkeit der Entwicklung förmlich nach der Berechnung durch einen Rechner verlangt.

1. Es gilt:

$$a_{k,1} = 1 - \sum_{j=1}^{k+1} a_{k,j}$$

2. Für alle $\sum i^k$ gilt, wenn nur bis 1 summiert wird:

$$\begin{aligned} \sum_1^1 i^k &= 1^k = 1, \text{also} \\ 1 &= a_{k,1} + a_{k,2} + \ldots + a_{k,k+1} \end{aligned}$$

   Nur $a_{k,1}$ ist unbekannt.

3. Es ist:

$$\begin{aligned} a_{k,k+1} &= \frac{1}{k+1} \\ a_{k,k} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   Daraus folgt:

$$a_{k,1} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{k+1} - \sum_{j=2}^{k-1} a_{k,j}$$

4. Die einzelnen Faktoren sind:

$$\begin{array}{ll} a_{k,k-1} = \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \ldots 12 \cdot \frac{1}{11} & \frac{1}{6} = a_{2,1} \\ a_{k,k-2} = 0 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \ldots 12 \cdot \frac{1}{10} & 0 = a_{3,1} \\ a_{k,k-3} = -\frac{1}{30} \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} \ldots 12 \cdot \frac{1}{9} & -\frac{1}{30} = a_{4,1} \\ \vdots \quad\quad \vdots & \\ a_{k,2} \;\; = a_{k-1,1} \cdot \frac{1}{2} \cdot k & \end{array}$$

Damit erhält man für jedes $a_{k,j}$:

$$a_{k,j} = a_{k+1,j} \cdot k! \frac{1}{j!\,(k+1-j)!}$$

und zur Bestimmung von $a_{k,1}$:

$$a_{k,1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{k+1} - \sum_{j=2}^{k-1} \left[\frac{a_{j,1} k!}{j!\,(k+1-j)!} \right]$$

wobei $k!$ als Konstante noch ausgeklammert werden kann:

$$a_{k,1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{k+1} - k! \sum_{j=2}^{k-1} \left[\frac{a_{j,1}}{j!\,(k+1-j)!} \right]$$

Diese Formel gestattet, aus $a_{2,1}$ mit $k = 3$ $a_{3,1}$ und mit $k = 4$ $a_{4,1}$ und so fortfahrend, alle weiteren Startkoeffizienten zu berechnen.

k	j												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	1												
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$											
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$										
3	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$									
4	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$								
5	0	$-\frac{1}{12}$	0	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$							
6	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{7}$						
7	0	$\frac{1}{12}$	0	$-\frac{7}{24}$	0	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$					
8	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{2}{9}$	0	$-\frac{7}{15}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}$				
9	0	$-\frac{3}{20}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{7}{10}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$			
10	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	-1	0	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{11}$		
11	0	$\frac{5}{12}$	0	$-\frac{11}{8}$	0	$\frac{11}{6}$	0	$-\frac{11}{8}$	0	$\frac{11}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	
12	$\frac{691}{2730}$	0	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{33}{10}$	0	$\frac{22}{7}$	0	$-\frac{11}{6}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{13}$

Tabelle 1: Berechnetete Startkoeffizienten

Die Programmierung dieser Beziehung für den TI59 und die Berechnung ergibt die zusammengestellten Werte in Tabelle 1.

Man zeigt schon allerhand Optimismus, wenn man ein Schema für $k = 0$ bis $k = 12$ angibt, ohne überhaupt irgendetwas bewiesen zu haben. daher seien wenigstens für $k = 10$ einige spezielle Werte berechnet.

$$\sum_1^1 i^{10} = 1 \qquad \sum_1^2 i^{10} = 1.025$$

$$\sum_1^3 i^{10} = 60.074 \qquad \sum_1^4 i^{10} = 1.108.650$$

$$\sum_1^5 i^{10} = 10.874.275 \qquad \sum_1^6 i^{10} = 71.340.451$$

$$\sum_1^7 i^{10} = 353.815.700 \qquad \sum_1^8 i^{10} = 1.427.557.524$$

Gemäß dem nachstehendem Ausdruck

$$\sum i^{10} = \frac{5}{66}n - \frac{1}{2}n^3 + n^5 - n^7 + \frac{5}{6}n^9 + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{1}{11}n^{11}$$

ergaben sich die oberen Zahlenwerte.

7 Die weitere Beweisführung

Bisher ist die Potenzsummenformel nur bis $k = 3$ bewiesen worden. Für $k = 4$ ist sie eine Vermutung. Man muss bedenken, dass der Beweis durch vollständige Induktion mit steigendem k immer mehr Rechenarbeit erfordert, denn schon bei $k = 4$ kommen fünfte Potenzen vor. Die Frage ist, ob ein allgemeiner Beweis möglich und einfach ist. Der erste, bei n stehende Faktor folgt nämlich nicht aus dem allgemeinen Entwicklungsgesetz

$$a_{m+1,n+1} = a_{m,n}\frac{m+1}{n+1},$$

sondern aus den übrigen Faktoren bei n^3 bis n^{k+1}, die aus dem Diagonalengesetz folgen. Daher hängt jeder erste Faktor von den vorangegangenen Faktoren für niedrigere k ab. Dies wird sicherlich den Beweis erschweren. Andererseits werden die Potenzen von $(n + 1)$ Faktoren mit Fakultäten im Zähler und Nenner enthalten, so dass manches sich wegkürzen könnte. Es ist nämlich

$$(n+1)^i = n^i + \binom{i}{1} n^{i-1} + \binom{i}{2} n^{i-2} + \ldots \binom{i}{i-1} n + 1$$

$$\text{wobei} \quad \binom{i}{e} = \frac{i!}{e!(i-e)!}\ .$$

8 Allgemeiner Beweis durch vollständige Induktion

$$\frac{n^{k+1}}{k+1} + \frac{n^k}{2} + k!\sum_{j=2}^{k} a_{j,1}\frac{n^{k+1-j}}{j!\,(k+1-j)!} + (n+1)^k$$
$$= \frac{(n+1)^{k+1}}{k+1} + \frac{(n+1)^k}{2} + k!\sum_{j=2}^{k} a_{j,1}\frac{(n+1)^{k+1-j}}{j!\,(k+1-j)!}$$

Die beiden höchsten Potenzen auf der linken Seite ergänzen sich zu Null mit dem jeweils ersten Glied der Potenzreihen auf der rechten Seite der Gleichung:

$$\begin{aligned} k!\sum_{2}^{k} a_{j,1}\frac{n^{k+1-j}}{j!\,(k+1-j)} + \frac{n^k}{2} + \frac{(n+1)^k}{2} \quad &= \quad \sum_{i=0}^{k} n^i\binom{k+1}{i}\frac{1}{k+1} + k!\sum_{j=2}^{k} a_{j,1}\frac{(n+1)^{k+1+j}}{j!\,(k+1-j)!} \\ k!\sum_{j=2}^{k} a_{j,1}\frac{n^{k+1-j}}{j!\,(k+1-j)} + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k-1} n^i\binom{k}{i} \quad &= \quad \sum_{i=0}^{k} n^i\binom{k+1}{i}\frac{1}{k+1} + k!\sum_{j=2}^{k} a_{j,1}\frac{(n+1)^{k+1-j}}{j!\,(k+1-j)!} \end{aligned}$$

Die Beweisführung vereinfacht sich nunmehr auf den Vergleich gleicher Potenzen. Daher können die Summenzeichen fortfallen. Die niedrigsten Potenzen folgen aus $i = 0$ und $i = 1$:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{k+1} + k!\sum_{j=2}^{k} a_{j,1}\frac{1}{j!\,(k+1-j)!}$$

Diese Beziehung erhält man für $i = 0$. Im Abschnitt 6 wurde sie, nach $a_{k,1}$ aufgelöst, vorgestellt.

$$a_{k,1} + \frac{k}{2} = 1 + \sum_{j=2}^{k} a_{j,1}\binom{k}{j}$$

wird für n^1 erhalten. $a_{k,1}$ erscheint auf beiden Seiten und fällt heraus, nach $a_{k-1,1}$ aufgelöst ergibt sich:

$$a_{k-1,1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{k} - \left[\sum_{2}^{k-2} a_{j,1}\binom{k}{j}\right]\frac{1}{k}$$

und damit dieselbe Beziehung wie bei n^0, nur eben anstatt für k hier für $k-1$.

Wenn die allgemeine Formel für $\sum i^k$, wie sie vermutet wird, richtig ist, muss sicherlich die Bestimmungsgleichung für die $a_{k,1}$, wie sie sich aus dem Koeffizientenvergleich bei gleichen Exponenten ergibt, unabhängig vom Exponenten immer zu den gleichen Werten $a_{k,1}$ führen. Wenn dieser Beweis gelingt, kann man sagen, dass er nur unter der Bedingung gilt, dass die Koeffizienten sich gemäß der Bestimmungsgleichung ergeben. Da diese rekursiv aufgebaut ist, d. h. das nächst höhere $a_{k,1}$ aus den vorangegangenen folgt, kann dann die gesamte Menge der $a_{k,1}$ ausgehend von $a_{2,1} = 6^{-1}$ berechnet werden. Dies ist vorab bereits geschehen mithilfe eines Programms auf dem TI 59.

$$\begin{aligned}
a_{2,1} &= 6^{-1} & a_{12,1} &= -691 \cdot 2730^{-1}\\
a_{4,1} &= -30^{-1} & a_{14,1} &= 7 \cdot 6^{-1}\\
a_{6,1} &= 42^{-1} & a_{16,1} &= -3617 \cdot 510^{-1}\\
a_{8,1} &= -30^{-1} & a_{18,1} &= 43867 \cdot 798^{-1}\\
a_{10,1} &= 5 \cdot 66^{-1} & a_{20,1} &= -174611 \cdot 330^{-1}
\end{aligned}$$

Ein einfaches Entwicklungsgesetz ist nicht zu erkennen. Einzige Regelmäßigkeit scheint der Vorzeichenwechsel und der Ausfall der a-Werte für ungerade k zu sein.

Die Ermittlung der Brüche gelang über die Perioden der Dezimalstellen. $a_{18,1}$ ist geraten (Rest $\cdot 798 - 775 \approx 10^{-7}$).

Die Beziehung zu Beginn dieses Abschnitts kann natürlich auch zum Koeffizientenvergleich in der i-ten Potenz benutzt werden: Es ist dann $j = k + 1 - i$ und $k + 1 - j = 1$:

$$\frac{k! a_{k+1-i,1}}{(k+1-i)! i!} + \frac{k!}{i!\,(k-i)!} = \frac{\frac{(k+1)!}{k+1}}{i!\,(k+1-i)!} + k! \sum_{2}^{k+1-j} \frac{a_{j,1}\binom{k+1-j}{i}}{j!\,(k+1-j)!}$$

Der Vergleich der a-Werte mit höchstem Index ergibt:

$$\frac{k! a_{k+1-i,1}}{(k+1-i)! i!} + \ldots = \ldots k! \frac{a_{k+1-i}\,(k+1-j)!}{j!\,(k+1-j)! i!\,(k+1-j-i)!}$$

Da $j! = (k+1-i)!$ und $k+1-j-i = 0$ und $0! = 1$ fallen die a-Werte mit dem höchsten Index heraus und es bleibt nach Division mit $k!$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{i!\,(k-i)!} - \frac{1}{i!\,(k+1-i)!} = \sum_{j=2}^{k+1-i-1} \frac{a_{j,1}\binom{k+1-j}{i}}{j!\,(k+1-j)!}$$

$$a_{k-i} = \frac{1}{2} - \frac{1}{k+1-i} - i!\,(k-i)! \sum_{j=2}^{k-i-1} \frac{a_{j,1}\binom{k+1-j}{i}}{j!\,(k+1-j)!}$$

9 Die Bedeutung der Koeffizienten $a_{k,1}$

Die Frage ist sicherlich berechtigt, ob den Koeffizienten, die am Anfang der Reihe zur Berechnung einer Potenzsumme ganzer Zahlen stehen gemäß

$$\sum_{k=1}^{n} i^k = a_{k,1} \cdot n + \ldots,$$

eine besondere Stellung zukommt. Wer einmal in einer mathematischen Formelsammlung nachschaut, findet sie dort als Bernoulli'sche Zahlen, wobei $\left|a_{2n,1}\right| = B_n$. Sie kommen in verschiedenen unendlichen Reihen vor. Z. B.:

$$\frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!} B_n = \frac{1}{1^{2n}} + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}}$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}\left(2^{2n}-1\right)}{(2n)!} B_n x^{2n-1}$$

Die hier hergeleitete Potenzsummenformel wird geschrieben:

$$\sum_{x=1}^{n} x^k = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \frac{n^k}{2} + \frac{1}{2}\binom{k}{1} B_1 n^{k-1} - \frac{1}{4}\binom{k}{3} B_2 n^{k-3} + \frac{1}{6}\binom{k}{5} B_3 n^{k-5} - \ldots$$