Mengenlehre

Tobias Krähling
eMail: <Tobias.Kraehling@semibyte.de>
Homepage: <www.semibyte.de>

28.11.2010
Version 1.1

Zusammenfassung

Das vorliegende Dokument enthält eine Einführung in die Mengenlehre, die von Georg Cantor begründet wurde.

1 Was ist eine Menge?

Die Menge ist nach Georg Cantor[1], dem Begründer der Mengenlehre, eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedlichen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Für ein Objekt x und eine Menge M steht fest, ob das Objekt zu dieser gehört oder nicht, man sagt auch x ist ein Element bzw. kein Element von der Menge M. Die mathematische Schreibweise hierfür ist:

$$x \in M \Rightarrow x \text{ ist ein Element der Menge } M$$
$$x \notin M \Rightarrow x \text{ ist kein Element der Menge } M$$

Dabei hat es sich etabliert, dass Mengen meist mit Großbuchstaben sowie die Elemente mit Kleinbuchstaben bezeichnet werden.

Widersprüche werden in der Mengenlehre durch die Reglementierung von Axiomen versucht zu vermeiden, seitdem Bertrand Russel[2] nachgewiesen hat, dass der unvorsichtige Gebrauch von Mengenbegriffen zu eben diesen Widersprüchen führen kann.

[1] Georg Cantor: 1845–1918, dt. Mathematiker
[2] Bertrand Russel, 1872-1970, englischer Logiker, Mathematiker und Philosoph

1.1 Bildung von Mengen

Um mit Mengen arbeiten zu können, müssen Möglichkeiten geschaffen werden, diese zu definieren und neue einzuführen. Bei der Bildung von Mengen ist es erlaubt, nur die Elemente mit in die Menge aufzunehmen, die eine bestimmte Eigenschaft E aufweisen. Die Beschreibung der Mengen kann über verschiedene Methoden durchgeführt werden:

1,2,3 — Aufzählen aller Elemente, die Reihenfolge der Elemente spielt dabei keine Rolle

$1,2,\ldots 10$ — Bei größeren Bereichen können die Zwischenbereiche durch Pünktchen ausgelassen werden, solang der Algorithmus zur Erzeugung der fehlenden Zahlen offensichtlich ist. Stehen die Pünktchen dabei am Ende, so ist eine unendliche Reihe bezeichnet.

Um Missverständnisse vorzubeugen ist die Schreibweise als Aussageform bei nicht eindeutigem Bereichsangabe vorzuziehen:

$$M := \{x | E(x)\}$$

wobei die Menge M alle Elemente x enthält, bei der die Aussageform $E(x)$ wahr ist.

Bei den Elementen einer Menge wird dabei nicht vorausgesetzt, dass diese voneinander verschieden sind. Somit folgt:

$$\{1,1,2,3\} = \{1,2,2,3\} = \{1,2,3\}$$

Enthält eine Menge keine Elemente (für alle x ist $E(x)$ falsch), so ist dies eine *leere Menge*. Sie wird mit dem Symbol $\varnothing$ gekennzeichnet und ist Teilmenge einer jeden Menge, denn

$$x \in \varnothing \Rightarrow x \in M$$

ist wahr, da $x \in M$ falsch ist.

Einige wichtige Mengen haben eine besondere Kennzeichnung, wobei diese mit üblicherweise mit sogenannten Blackboard-Buchstaben oder kaligraphischen Buchstaben bezeichnet werden.

natürliche Zahlen

$$\mathbb{N} := \left\{ x \;\middle|\; 1,2,3,\ldots \right\}$$

natürliche Zahlen mit 0

$$\mathbb{N}_0 := \left\{ x \;\middle|\; 0,1,2,3,\ldots \right\}$$

ganze Zahlen

$$\mathbb{Z} := \left\{ x \;\middle|\; \ldots,-2,-1,0,1,2,3,\ldots \right\}$$

rationale Zahlen

$$\mathbb{Q} := \left\{ x \;\middle|\; \frac{p}{q} \text{ mit } p \text{ und } q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

reelle Zahlen

$\mathbb{R}$:= alle rationalen Zahlen ($\mathbb{Q}$) sowie Zahlen, die sich nur durch einen unendlichen Dezimalbruch darstellen lassen (z. B. $\pi, e \ldots$)

komplexe Zahlen

$$\mathbb{C} := \left\{ x \;\middle|\; a + ib \text{ mit } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Primzahlen

$$\mathcal{P} := \left\{ x \;\middle|\; 2,3,5,7,11,13,17,\ldots \right\}$$

Die Kennzeichnung der *natürlichen Zahlen* mit und ohne Null ist nicht einheitlich. Üblich ist, wenn die positiven natürlichen Zahlen mit $\mathbb{N}$ bezeichnet wird (wie oben), die natürlichen Zahlen einschließlich der Null mit $\mathbb{N}_0$ zu kennzeichnen. Wird mit $\mathbb{N}$ jedoch die natürlichen Zahlen einschließlich der Null bezeichnet, so wird die Menge der natürlichen Zahlen ohne Null mit $\mathbb{N}^+$, $\mathbb{N}^*$ oder $\mathbb{N}_{>0}$ bezeichnet.

1.2 Intervalle

Wenn die Elemente a und b aus der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ stammen, so können die nachfolgenden Intervalle definiert werden. Diese unterscheiden sich jeweils nur darin, ob die Elemente a,b als Eckpunkte zum Intervall hinzugezählt werden oder nicht.

abgeschlossenes Intervall:

$$[a,b] := \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a \leq x \leq b \right\}$$

offenes Intervall:

$$]a,b[:= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a < x < b \right\}$$

li. abgeschlossenes, re. offenes Intervall:

$$[a,b[:= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a \leq x < b \right\}$$

li. offenes, re. abgeschlossenes Intervall:

$$]a,b] := \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a < x \leq b \right\}$$

2 Gleichheit

Für die Gleichheit von Mengen gilt die nachfolgende Definition:

Definition 2.1 [*Gleichheit*]

Zwei Mengen (M_1,M_2) sind gleich, wenn sie die selben Elemente besitzen und die Äquivalenz

$$M_1 = M_2 \Leftrightarrow (\forall x : x \in M_1 \Leftrightarrow x \in M_2)$$

existiert. ◂

Satz 2.2

Für die Gleichheit von Mengen gelten die folgenden Gesetze:

1. Reflexivität: Jede Menge ist sich selber gleich ($M = M$).
2. Symmetrie: Ist $M = N$, so ist auch $N = M$.
3. Transitivität: Ist $M = N$ und $N = P$, so auch $M = P$. ◂

3 Teilmengen

Definition 3.1 [*Teilmenge*]

Die Menge T wird eine Teilmenge von M genannt, wenn

$$\forall x \in T \Rightarrow x \in M$$

erfüllt ist und schreibt $T \subseteq M$.

Ist bei einer Teilmenge die Bedingung

$$(\forall x \in T \Rightarrow x \in M) \wedge (\exists x \in M \Rightarrow x \notin T)$$

erfüllt, d. h. $T \subseteq M$ und $T \neq M$, so nennt man T eine *echte Teilmenge* von M, geschrieben als $T \subset M$. ◀

Beispiel 3.1:

Sei $A := \{1,2,3,4,5\}$, $B := \{1,2,3,4,5\}$ und $C := \{1,2,3,4\}$. So ist A eine Teilmenge von B ($A \subseteq B$), da alle Elemente von A auch in der Menge B enthalten sind – da jedoch alle Elemente von B auch in A enthalten sind, handelt es sich *nicht* um eine echte Teilmenge.C ist eine echte Teilmenge von B ($C \subset B$), da alle Elemente von C in der Menge B enthalten sind und es ein Elemente in B gibt (5), welches nicht in der Menge C enthalten ist ($B \neq C$).

Mit Hilfe der Teilmengen kann auch eine weitere Zusammenhang für die Gleichheit zwischen zwei Mengen M_1 und M_2 aufgestellt werden:

$$(M_1 \subseteq M_2) \wedge (M_2 \subseteq M_1)$$

Definition 3.2 [*Obermenge*]

Als Obermenge O wird die Menge genannt, die mindestens alle Elemente einer Menge M enthält:

$$\forall x \in M\; x \in O \Rightarrow x \in M$$

Dies wird als $O \supseteq M$ geschrieben.

Ist bei einer Obermenge zusätzlich die Bedingung

$$(\forall x \in M\; x \in O \Rightarrow x \in M) \wedge (\exists x \in O \Rightarrow x \notin M)$$

erfüllt, d. h. $O \supseteq M$ und $O \neq M$, so nennt man O eine *echte Obermenge* von M und schreibt $O \supset M$. ◀

Die Obermenge ist demzufolge ähnlich der Teilmenge, wobei die beiden Mengen vertauscht werden und das Symbol ebenfalls gespiegelt wird. Ist die Menge A eine Teilmenge der Menge B ($A \subseteq B$), so ist B die Obermenge von A ($B \supseteq A$).

Beispiel 3.2:

Sei wiederum $A := \{1,2,3,4,5\}$, $B := \{1,2,3,4,5\}$ und $C := \{1,2,3,4\}$. So ist B eine Obermenge von A ($B \supseteq B$), da alle Elemente von A auch in der Menge B enthalten sind. Die Menge B ist eine echte Obermenge von C ($B \supset C$), da sie alle Elemente von C enthält sowie mindestens ein weiteres Elemente, das nicht in C enthalten ist.

Teil- und Obermenge sind *reflexiv* und *transitiv*, jedoch nicht *symmetrisch* (siehe Seite 2).

Definition 3.3 [*Potenzmenge*]

Die Menge aller Teilmengen einer Menge M wird *Potenzmenge* $\mathfrak{P}$ genannt.

$$\mathfrak{P}(M) := \left\{ T \;\middle|\; T \subset M \right\}$$

◀

Beispiel 3.3:

Beispiel für die Potenzmenge von $M := \{1,2,3\}$:

$$\mathfrak{P}(M) = \{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$$

4 Vereinigung, Durchschnitt und Komplement

Definition 4.1 [*Vereinigungsmenge*]

Die Vereinigungsmenge aus den beiden Mengen A und B ist eine Menge, die sowohl die Elemente aus der Menge A wie auch die der Menge B enthält.

$$A \cup B := \left\{ x \;\middle|\; (x \in A) \vee (x \in B) \right\}$$

(gesprochen »A vereinigt mit B«) ◀

Beispiel 4.1:

Sei $A := \{1,2,3\}$, $B := \{1,2,5,6,7\}$ und $C := \{9,10,11\}$. So ist

- $A \cup B = \{1,2,3,5,6,7\}$
- $A \cup C = \{1,2,3,9,10,11\}$
- $B \cup C = \{1,2,5,6,7,9,10,11\}$

Definition 4.2 [*Durchschnittsmenge*]

Die Durchschnittsmenge ist die Menge an Elementen aus den Mengen A und B, die sowohl in der Menge A wie auch in der Menge B vorhanden sind.

$$A \cap B := \left\{ \, x \;\middle|\; (x \in A) \wedge (x \in B) \, \right\}$$

(gesprochen »A geschnitten mit B) ◂

Ist die Durchschnittsmenge leer, d. h. ist enthält keine Elemente, so nennt man sie *disjunkt*.

Beispiel 4.2:

Sei $A := \{1,2,3\}$, $B := \{1,2,5,6,7,9\}$ und $C := \{9,10,11\}$. So ist

- $A \cap B = \{1,2\}$
- $B \cap C = \{9\}$
- $A \cap C = \{\varnothing\}$

Für die Vereinigung bzw. den Durchschnitt der Mengen $M_1 \ldots M_n$ gibt es eine verkürzte Schreibweise, ähnlich dem Produkt- und Summenzeichen.

$$\bigcup_{i=1}^{n} M_i = M_1 \cup \ldots \cup M_n$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} M_i = M_1 \cap \ldots \cap M_n$$

Definition 4.3 [*Differenzmenge*]

Als Differenzmenge der Mengen A und B wird die Menge der Elemente aus der Menge A bezeichnet, die nicht in der Menge B vorkommen.

$$A \setminus B := \left\{ \, x \;\middle|\; (x \in A) \vee (x \notin B) \, \right\}$$

(gesprochen »A ohne B«) ◂

Beispiel 4.3:

Sei $A := \{1,2,3\}$, $B := \{1,2,5,6,7,9\}$ und $C := \{9,10,11\}$. So ist

- $A \setminus B = \{3\}$
- $B \setminus C = \{1,2,5,6,7\}$
- $A \setminus C = \{1,2,3\}$

Definition 4.4 [*Komplement*]

Ist B eine Teilmenge von A ($B \subset A$), so wird die Differenzmenge $A \setminus B$ auch als das *Komplement von B in A* bezeichnet. Die Schreibweise hierfür ist:

$$\complement_A B \text{ oder } \overline{B}_A$$

(gesprochen »Komplement B von A« oder »B quer zu A«) ◂

Beispiel 4.4:

Sei $A := \{1,2,5,6,7,9\}$ und $B := \{1,6,9\}$, so ist das Komplement $\complement_A B = \{2,5,7\}$.

Die Vereinigungsmenge aus der Teilmenge und dem Komplement zu einer Grundmenge ist wieder die Grundmenge.

Beispiel 4.5:

Sei $A := \{1,2,5,6,7,9\}$ und $B := \{1,6,9\}$. So ist

$$\begin{aligned} A &= B \cup \complement_A B \\ A &= \{1,6,9\} \cup \{2,5,7\} \\ A &= \{1,2,5,6,7,9\} \end{aligned}$$

4.1 Cartesisches Produkt

Bei der Mengenbildung ist die Reihenfolge der enthaltenen Elemente irrelevant, daraus folgt, dass die Mengen $\{1,2\}$ und $\{2,1\}$ gleich sind. Soll die Reihenfolge der Elemente berücksichtigt werden, so werden diese zu *geordnete Paare* zusammenfasst und in der Form (x,y) geschrieben. Bei diesem Paar ist die Reihenfolge der Elemente wesentlich. Dabei sind zwei Paare (x,y) und (x',y') gleich, wenn $x = x'$ und $y = y'$.

Definition 4.5 [*cartesische Produkt*]

Das *cartesische Produkt* ist eine Menge, die aus den geordneten Paaren von Elementen gebildet wird, wobei diese nicht unbedingt derselben Menge angehören müssen.

$$A \times B := \left\{ (x,y) \;\middle|\; (x \in A), (y \in B) \right\}$$

(gesprochen »A kreuz B«) ◄

Das cartesische Produkt ist dabei nicht auf zwei Mengen beschränkt. Übertragen auf n Mengen, werden die Elemente zu geordnete n-Tupel zusammengefasst. Das cartesische Produkt $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ ist dann die Menge

$$M_1 \times \ldots \times M_n := \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \;\middle|\; x_i \in M_i, i = 1, \ldots, n \right\}$$

Wird das cartesische Produkt aus n selben Mengen gebildet, d. h. $M_i = M$, so wird, in Anlehnung an die Potenzrechnung, die Schreibweise

$$M^n := M \times M \times \ldots \times M$$

verwendet.

5 Mengenalgebra

Für die beliebigen Mengen A, B und C gelten folgende Gesetzmäßigkeiten:

Satz 5.1 [*Kummutativgesetz*]

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$ ◄

Satz 5.2 [*Assoziativgesetz*]

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$ ◄

Satz 5.3 [*Distributivgesetz*]

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$ ◄

Satz 5.4

Für beliebige Mengen A und B gelten des weiteren die Rechengesetze:

- $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cup A = A$, $A \cap A = A$
- $\mathfrak{P}(A) \cup A = \mathfrak{P}(A)$, $\mathfrak{P}(A) \cap A = A$
- $\complement_A B \cup B = A$, $\complement_A B \cap B = \emptyset$
- $\complement_A A = \emptyset$, $\complement_\emptyset A = A$, $\complement_A \left(\complement_A B\right) = A$ ◄