

# 505 – Widerstand bei tiefen Temperaturen

## Versuchsprotokoll zum F-Praktikum an der Ruhr-Universität Bochum

---

Paul Katolla <p\_katolla@yahoo.de>

06.10.2009

Tobias Krähling <Tobias.Kraehling@SemiByte.de>

Version 1.1

### Inhaltsverzeichnis

---

### 1 Einführung

---

<b>1 Einführung</b>	<b>1</b>
<b>2 Elektrischer Ladungstransport</b>	<b>2</b>
2.1 Transporttheorie des freien Elektronengases	2
2.2 Übergang auf das quasifreie Elektronengas	2
2.3 Streuung an Phononen . . . . .	3
2.3.1 Debye-Temperatur . . . . .	4
2.4 Kondo-Effekt . . . . .	4
2.5 Streuung an Magnonen . . . . .	5
2.5.1 Klassifizierung des magnetischen Verhaltens . . . . .	5
2.5.2 Spinwellen und Magnonen . . . . .	6
2.5.3 Widerstandsverlauf . . . . .	8
<b>3 Supraleitung</b>	<b>8</b>
3.1 Cooper-Paar-Modell . . . . .	9
3.2 Suprastrom . . . . .	10
3.3 Supraleiter 1. und 2. Art . . . . .	10
<b>4 Untersuchte Materialien und zugehörige Widerstandsverläufe</b>	<b>10</b>
<b>5 Experimenteller Aufbau und Durchführung</b>	<b>11</b>
<b>6 Auswertung der Proben</b>	<b>13</b>
6.1 Kupferprobe . . . . .	13
6.2 Gold mit 1% Vanadium . . . . .	13
6.3 Dysprosium . . . . .	15
6.4 Nb <sub>3</sub> Sn-Probe . . . . .	16
<b>7 Zusammenfassung</b>	<b>17</b>
<b>Literatur</b>	<b>19</b>

## 2 Elektrischer Ladungstransport

Der gerichtete Transport von Elektronen wird als Strom bezeichnet und ist getrieben durch ein elektrisches Feld  $E$ . Die elektrische (spezifische) Leitfähigkeit  $\sigma$  kann dann als Vermögen eines Stoffes interpretiert werden, Elektronentransport zuzulassen und ist definiert als Proportionalitätskonstante zwischen treibendem elektrischen Feld  $E$  und der resultierenden elektrischen Stromdichte  $J$ :

$$J = \sigma E = -\sigma \nabla \Phi_{el} \quad (2.1)$$

mit dem elektrischen Potential  $\Phi_{el}$ . Der Kehrwert der elektrischen Leitfähigkeit kennzeichnet den Widerstand des Stoffes gegenüber dem Ladungstransport und wird als (spezifischer) elektrischer Widerstand  $\varrho$  bezeichnet:

$$\varrho = \frac{1}{\sigma} \quad (2.2)$$

### 2.1 Transporttheorie des freien Elektronengases

Bereits aus der Transporttheorie des freien Elektronengases erhält man für die Leitfähigkeit die Beziehung

$$\sigma = \frac{ne^2\tau(E_F)}{m_e} = \frac{ne^2\ell}{m_e v_F} \quad (2.3)$$

mit der mittleren Stoßzeit  $\tau$ , der mittleren freien Weglänge  $\ell$ , Ladungsträgerdichte  $n$  und der Fermi-Geschwindigkeit  $v_F$ . Diese Beziehung erhält man, wenn die Stromdichte  $J$  als Funktion der mittleren Geschwindigkeit  $\langle v \rangle = \langle \hbar k / m_e \rangle$  aufgefasst wird. Die Änderung der Elektronenimpulsverteilung lässt sich beschreiben über

$$\frac{d\langle k \rangle}{dt} = \frac{\partial \langle k \rangle}{\partial t} \Big|_{\text{Kraft}} + \frac{\partial \langle k \rangle}{\partial t} \Big|_{\text{Streu}}. \quad (2.4)$$

Betrachtung von stationären Prozessen, d. h.  $\frac{d\langle k \rangle}{dt} = 0$ , und Verwendung eines einfachen Relaxationsansatzes

$$\frac{\partial \langle k \rangle}{\partial t} \Big|_{\text{Streu}} = -\frac{\delta k}{\tau} \quad (2.5)$$

für die Streuprozesse führt auf Gleichung (2.3)<sup>1</sup>. Die Abhängigkeit von Gleichung (2.3) von der Fermi-Energie  $E_F$  liegt darin begründet, dass aufgrund des Pauli-Prinzips nur Elektronen nahe der Fermi-Energie an Streuprozessen teilnehmen können, da diese freie Zustände finden<sup>2,3</sup>. Die Leitfähigkeit eines Festkörpers hängt sowohl von der Anzahl der freien Ladungsträger als auch von der mittleren Stoßzeit ab.

### 2.2 Übergang auf das quasifreie Elektronengas

Zwar beschreibt das Modell des freien Elektronengases bereits gut metallische Festkörper, jedoch führen bereits bei einfachen Metallen wie Lithium und Natrium die positiven Atomrümpfe zu einer periodischen Modulation des Potential – dies führt zu einer Beeinflussung der Ladungsverteilung der Elektronen und effektiv zu einer gewissen Bindung der Elektronen. Für solche Systeme sind die Lösungen der Schrödingergleichung

$$\mathcal{H}\psi(\mathbf{r}) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \quad (2.6)$$

<sup>1</sup> Die Herleitung ist in Gross und Marx [7, S. 251ff] zu finden.

<sup>2</sup> Der maximale Energieübertrag bei einem Streuprozess ist in der Größenordnung  $k_B T \ll E_F$ , so dass Elektronen, die sich tief in der Fermi-Kugel befinden, nicht an den Rand der Fermi-Kugel und somit auf freie Zustände gehoben werden können.

<sup>3</sup> DRUDE'S Theorie lieferte zufällig ebenfalls Gleichung (2.3), jedoch verwendete er ein klassisches freies Elektronengas, in dem das Pauli-Prinzip keine Anwendung fand. Der Umstand zweier falscher Annahmen, die sich gegenseitig kompensierten, führte jedoch zur richtigen Gleichung (2.3).

für ein gitterperiodisches Potential

$$V(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r} + \mathbf{R}) \quad (2.7)$$

die Blochwellen der Form

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \exp\{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}\} \quad (2.8)$$

mit

$$u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{R}). \quad (2.9)$$

Dabei ist  $\mathbf{R} = n_1\mathbf{a}_1 + n_2\mathbf{a}_2 + n_3\mathbf{a}_3$  ein beliebiger Translationsvektor und  $\mathbf{a}_i$  die primitiven Gittervektoren.

Blochwellen sind ebene Wellen, die mit einer gitterperiodischen Funktion moduliert sind und werden an einem perfekten statischen Kristallgitter nicht gestreut. Daraus folgt, dass in solchen Kristallen die Wellenausbreitung ungehindert erfolgt und der Widerstand in diesem Fall verschwindet. In realen Kristallgittern sind jedoch immer Unregelmäßigkeiten der periodischen Struktur vorhanden – hierzu zählen unter anderem Versetzungen (Linien- und Flächendefekte), Frenkel- und Schottky-Defekte oder der Einbau von Fremdatomen – die zu einer Störung des gitterperiodischen Potentials führen. Diese statischen Defekte<sup>4</sup> können über ein Störpotential beschrieben werden und führen zu einer Streuung der Blochwellen an den Störstellen. Dies führt zu dem sogenannten Restwiderstand, so dass der Widerstand auch bei einem Kristall ohne Dynamik (d. h. bei  $T = 0$ ) nicht verschwindet:

$$\varrho(T = 0) = \varrho_0 = \text{const.} > 0. \quad (2.10)$$

Bei der (gezielten) Verunreinigung von Metallen mit anderen Metallen ist dabei der Restwiderstand proportional zum Grad der Verunreinigung:  $\varrho_0 \propto c_{\text{Verunreinigung}}$ .

<sup>4</sup> In der Regel bleiben diese Defekte erhalten und weisen keine zeitliche Veränderung auf. Durch geeignete Maßnahmen, z. B. Tempern, Druck oder Zug, lassen sich jedoch Defekte in Kristallstrukturen ausheilen.

Eine Änderung an Gleichung (2.3) ist noch für die Elektronenmasse anzuwenden. Um die Wechselwirkung mit dem Gitter der Atomrümpfe sowie Wechselwirkungen zwischen den Elektronen untereinander zu berücksichtigen, ist hier die effektive Masse oder Bandmasse  $m_e^*$  einzusetzen [4].

## 2.3 Streuung an Phononen

Neben der im letzten Abschnitt angesprochenen (temperaturunabhängigen) Streuung an Defekten und Verunreinigungen ist bei einfachen Metallen die (temperaturabhängige) Streuung an Phononen ein weiterer dominanter Streumechanismus. Phononen sind die Quanten des Auslenkfeldes bei Schwingungen innerhalb eines Kristalls und beschreiben die Schallwellen in einem Kristall. Nach dem Welle-Teilchen-Dualismus können sie als Teilchen mit Impuls  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{q}$  und Energie  $E = \hbar\omega$  aufgefasst werden. Wellen- und Teilchenbild korrespondieren dabei in der Form, dass eine höhere Schwingungsanregung (entspricht einer höheren Amplitude) einer höheren Anzahl an Phononen (Besetzungszahl), die dieser Schwingung entsprechen, entspricht.

Für hohe Temperaturen ( $T \gg \Theta_D$  mit der Debye-Temperatur  $\Theta_D$ , siehe unten) ist die Phononenanzahl  $n_q$  pro Mode  $q$  proportional zum quadratischen Mittelwert der Dichtefluktuation  $\overline{\Delta^2}$  (entspricht dem Amplitudenquadrat), die nach dem Äquipartitionsprinzip der klassischen statistischen Mechanik geben ist durch

$$n_q \propto \overline{\Delta^2} \propto \frac{k_B T}{M\omega_q^2} \stackrel{\omega_q \rightarrow \omega_D}{\propto} \frac{T}{M\Theta_D^2} \propto T \quad (2.11)$$

mit der Atommasse  $M$ , der Phononenfrequenz  $\omega_q$  und der Debye-Frequenz  $\omega_D = k_B\Theta_D/\hbar$  [7, S. 343f]. Die Wahrscheinlichkeit für Streuung von Elektronen an Phononen (effektiver

Streuquerschnitt) hängt von der Anzahl der Phononen ab, da hierdurch die mittlere freie Weglänge  $\ell$  reduziert wird und offensichtlich gilt:

$$\varrho \propto \frac{1}{\ell} \propto \frac{1}{\tau} \propto n_q \propto T. \quad (2.12)$$

Für kleine Temperaturen muss berücksichtigt werden, dass die Moden entsprechend der Bose-Einstein-Statistik (Phononen sind wie Photonen Bosonen)

$$f_{BE}(\omega) = \frac{1}{\exp\left\{\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right\} - 1} \quad (2.13)$$

besetzt werden (das chemische Potential  $\mu$  taucht hier nicht auf, da die Phononenanzahl keine Erhaltungsgröße ist). Grüneisen fand für den phononischen Beitrag zum elektrischen Widerstand die Beziehung

$$\varrho_{Ph}(T) = A \left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^5 \int_0^{\Theta_D/T} \frac{x^5}{(e^x - 1)(1 - e^{-x})} dx \quad (2.14)$$

mit

$$x = \frac{\hbar\omega_q}{k_B T} = \frac{\Theta_D}{T} \frac{q}{q_D} \quad (2.15)$$

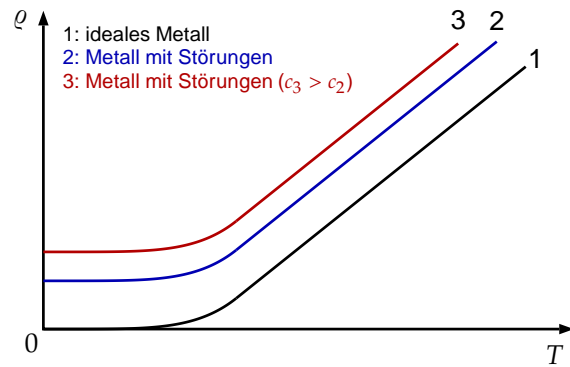
und dem Debye-Wellenvektor  $q_D$ . Für tiefe Temperaturen wird das Integral konstant, für hohe Temperaturen ( $\Theta_D/T$  klein) geht es gegen  $(\Theta_D/T)^4$  – insgesamt erhält man also mit den statischen Störstellen (vgl. Abschnitt 2.2) das Verhalten

$$\varrho(T) = \varrho_0 + \begin{cases} \alpha T^5 & T \ll \Theta_D \\ \beta T & T \lesssim \Theta_D \end{cases} \quad (2.16)$$

mit den Proportionalitätskonstanten  $\alpha$  und  $\beta$ . In Abbildung 1 ist der typische Widerstandsverlauf von Metallen schematisch dargestellt.

### 2.3.1 Debye-Temperatur

Der Begriff der Debye-Temperatur stammt aus der Debye-Näherung, die auf der Annahme



**Abbildung 1:** Schematischer typischer Widerstandsverlauf bei Metallen

basiert, dass alle Phononenzweige durch drei Zweige mit einer linearen Dispersion genähert werden. Da die Besetzung der optischen Phononen im tiefen Temperaturbereich sehr gering ist, stellt die Debye-Näherung für tiefe Temperaturen eine gute Näherung dar. Desweiteren wird hier statt einer Summation über alle Wellenvektoren nur eine Integration über die 1. Brillouin-Zone durchgeführt. Die Debye-Temperatur  $\Theta_D$  ist dann ein Maß für die Größe der in einem Material vorkommenden Phononenfrequenzen. Zusätzlich lässt sich durch die Debye-Temperatur der Grenzbereich angeben, in dem zwischen der klassischen und der quantenmechanischen Beschreibung von thermischen Eigenschaften des Kristallgitters unterschieden werden muss: quantenmechanisch für Temperaturen unterhalb  $\Theta_D$ , klassisch für Temperaturen oberhalb  $\Theta_D$ .

## 2.4 Kondo-Effekt

de Haas et al. [3] beobachtete bereits einen Anstieg des Widerstands von (nicht reinem) Gold bei niedrigen Temperaturen und ein dadurch verbundenes Minimum des Widerstandes für  $T > 0$  – dieses Verhalten konnte auch bei anderen Metallen beobachtet werden, dessen Ursache blieb zunächst jedoch ungeklärt. Eine Erklärung dieses Verhaltens konnte von

Kondo [9] geliefert werden. Enthält ein Metall, in dem ansonsten der temperaturabhängige Widerstand durch die Streuung an Phononen dominiert wird, zusätzliche magnetische Störstellen – also Verunreinigungen durch Atome, die ein magnetisches Moment besitzen – so findet bei niedrigen Temperaturen eine Wechselwirkung zwischen den lokalisierten magnetischen Momenten und den Elektronen des quasi-freien Elektronengases statt, welches als Streuung aufgefasst werden kann. Dabei versuchen die Elektronen ab einer kritischen Temperatur  $T_K$  die magnetischen Momente abzuschirmen, was zu einer stark reduzierten Beweglichkeit  $\mu = e\tau(E_F)/m_e^*$  und somit zu einer reduzierten Leitfähigkeit

$$\sigma = ne\mu = \frac{ne\tau(E_F)}{m_e^*} \quad (2.17)$$

führt (vgl. Gleichung (2.3)). Kondo fand durch Störungsrechnung zweiter Ordnung den Zusammenhang

$$\varrho(T)_K = c \left[ \varrho_1 + \varrho_2 \ln\left(\frac{T}{T_K}\right) \right] \quad (2.18a)$$

mit der als Kondotemperatur bezeichneten kritischen Temperatur  $T_K$  und der Konzentration der Störatome  $c$ . Unter Berücksichtigung des phononischen Anteils (siehe Abschnitt 2.3) erhält man für  $T \ll \Theta_D$  die Beziehung

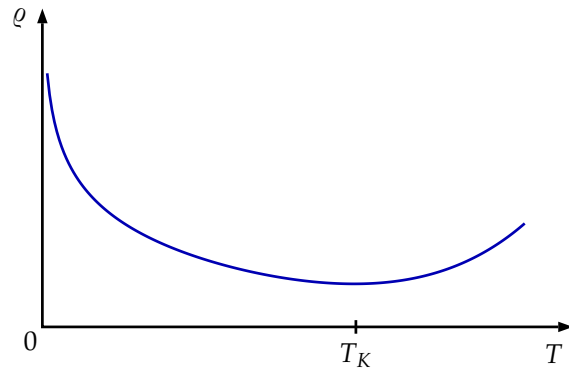
$$\varrho(T) = aT^5 + c [\tilde{\varrho}_1 - \tilde{\varrho}_2 \ln(T)] \quad (2.18b)$$

mit den neuen Koeffizienten  $a$ ,  $\tilde{\varrho}_1$  und  $\tilde{\varrho}_2$  [6].  $\tilde{\varrho}_1$  beschreibt dann den temperaturunabhängigen Störanteil (Restwiderstand), während  $\tilde{\varrho}_2$  den temperaturabhängigen Anteil durch die Streuung an den magnetischen Momenten beschreibt.

Ableitung von Gleichung (2.18b) nach  $T$  und gleichsetzen mit Null (suche des Minimums der Funktion) liefert

$$\frac{d\varrho(T)}{dT} \stackrel{!}{=} 0 = 5aT^4 - c \frac{\tilde{\varrho}_2}{T} = 5aT^5 - c\tilde{\varrho}_2$$

$$\Rightarrow T_K = \left( c \frac{\tilde{\varrho}_2}{5a} \right)^{1/5} \propto c^{1/5}. \quad (2.19)$$



**Abbildung 2:** Schematischer typischer Widerstandsverlauf beim Kondo-Effekt

Das es sich um ein Minimum handelt, sieht man, neben der Abbildung 2, an

$$\frac{d^2\varrho(T)}{dT^2} = 20aT^3 + \frac{c\tilde{\varrho}_2}{T^2} > 0,$$

da alle Variablen positiv sind (für  $T \neq 0$ ).

## 2.5 Streuung an Magnonen

### 2.5.1 Klassifizierung des magnetischen Verhaltens

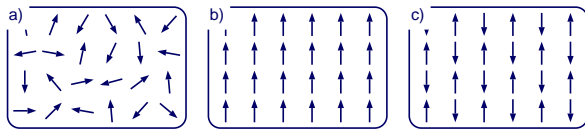
Die Magnetisierung von Festkörpern bzw. deren Verhalten in externen Magnetfeldern kann in verschiedene Klassen eingeteilt werden, wobei diese über eine Betrachtung der magnetischen Momente in dem Festkörper erfolgt.

#### ► diamagnetische Festkörper:

Bei dieser Klasse liegen ohne externes Magnetfeld keine permanente magnetische Dipole vor. Wird der Festkörper einem externen Magnetfeld ausgesetzt, so werden magnetische Dipole induziert, die dem externen Magnetfeld entgegengesetzt sind (Lenz'sche Regel) – d. h. die magnetische Suszeptibilität ist negativ:  $\chi_{dia} < 0$ .

#### ► paramagnetische Festkörper:

Zwar besitzen paramagnetische Festkörper im Gegensatz zu diamagnetischen



**Abbildung 3:** Illustration der a) paramagnetischen, b) ferromagnetischen und c) antiferromagnetischen Ordnung

Festkörpern permanente magnetische Dipole – diese können aus der Bahnbewegung oder dem Spin der Kristallelektronen entstehen –, jedoch sind diese ohne Einwirkung eines externen Feldes durch thermische Bewegung und dem Fehlen einer Austauschwechselwirkung isotrop verteilt, so dass die Magnetisierung im Mittel verschwindet. Ein externes Magnetfeld führt zu einer Ausrichtung der Dipole entlang des externen Feldes – die magnetische Suszeptibilität ist positiv:  $\chi_{para} > 0$ .

► **ferromagnetische Festkörper:**

In ferromagnetischen Festkörpern existieren bereits permanente magnetische Dipole, die sich auch ohne Einwirkung eines äußeren elektrischen Feldes in einzelnen Bereichen des Festkörpers – den Weißschen Bezirken – gemeinsam aufgrund der Austauschwechselwirkung<sup>5</sup> zwischen den Elektronenspins ausrichten und ein kollektives Phänomen darstellen. Die Ausbildung der Weißschen Bezirke (Kopplung der magnetischen Momente) beruht auf der Wechselwirkung zwischen den metallischen Leitungselektronen und den Spin-Momenten der Elektronen in nicht aufgefüllten Schalen. Oberhalb der Curie-Temperatur  $T_C$  geht durch die thermische Bewegung die Ordnung verloren – hier übersteigt die thermische Energie der Elektronenspins die Austauschwech-

<sup>5</sup> Physikalische Ursache der Austauschwechselwirkung ist die Coulomb-Wechselwirkung in Verbindung mit der Heisenbergschen Unschärferelation und dem Pauli-Prinzip.

selwirkung – und der Festkörper wird paramagnetisch. Ein externen Feld wird im ferromagnetischen Festkörper stark verstärkt – die Suszeptibilität ist positiv ( $\chi_{fm} \gg 0$ ) –, jedoch ist  $\chi_{fm}$  nicht konstant.

► **antiferromagnetische Festkörper:**

Wie bei ferromagnetischen Festkörpern existieren bereits permanente magnetische Dipole, externe Felder werden jedoch stark geschwächt, die Suszeptibilität ist negativ ( $\chi_{afm} \ll 0$ ). Der antiferromagnetische Festkörper verliert oberhalb der Néel-Temperatur  $T_N$  seine Ordnung und wird paramagnetisch.

Maßgeblich für die parallele oder antiparallele Ordnung der magnetischen Dipole – was einem ferro- bzw. antiferromagnetischen Festkörper entspricht – ist das Prinzip der minimalen Energie. Lokalisierte magnetische Momente (Spins) können über das Heisenberg-Modell beschrieben werden und man erhält in der Summe über viele benachbarte *gleichartig gekoppelte* lokalisierte Spins den Hamiltonoperator

$$\mathcal{H} = -2J \sum_{ij} s_i \cdot s_j \quad (2.20)$$

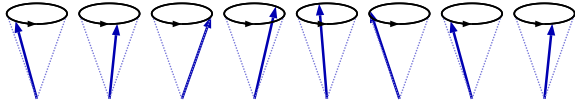
mit dem Austauschintegral  $J$  (dieser Hamiltonoperator wird auch Heisenberg'scher Ausdruck genannt). Abhängig vom Vorzeichen des Austauschintegrals  $J$  ist eine parallele oder antiparallele Orientierung der magnetischen Momente günstiger –  $J$  legt somit den magnetischen Charakter des Materials fest und man erhält:

$J > 0 \Rightarrow$  ferromagnetische Kopplung

$J < 0 \Rightarrow$  antiferromagnetische Kopplung

## 2.5.2 Spinwellen und Magnonen

Besteht eine magnetische Ordnung, wie bei ferro- oder antiferromagnetischen Festkörpern, so können niedrigerenergetische, elemen-



**Abbildung 4:** Illustration zu den Spinwellen

tare Anregungszustände – die *Spinwellen* – auftreten. Bei diesen Anregungszuständen präzedieren die Spinvektoren auf Kegelmänteln, wobei aufeinander folgende Spins einen konstanten Phasenverschiebungswinkel aufweisen (siehe Abbildung 4). In völliger Analogie zu den Phononen als Quanten der Gitterschwingungen (vgl. Abschnitt 2.3) werden die Quanten der Spinwelle als *Magnonen* bezeichnet.

Im thermischen Gleichgewicht ist die Anzahl der in einer Mode  $k$  angeregten Magnonen, analog zur Gleichung (2.13), gegeben über

$$\langle n(\omega_k) \rangle = \frac{1}{\exp\left\{\frac{\hbar\omega_k}{k_B T}\right\} - 1} \quad (2.21)$$

und die Gesamtzahldichte über

$$n_{mg} = \int D(\omega) \langle n(\omega) \rangle d\omega \quad (2.22)$$

mit  $D(\omega)$  als der Zustandsdichte der Magnonen im Frequenzintervall zwischen  $\omega$  und  $\omega + d\omega$ . Die Integration muss über die 1. Brillouin-Zone – dem Frequenzbereich der erlaubten  $k$ -Vektoren – erfolgen, wobei jedoch für kleine Temperaturen die Integrationsgrenzen in sehr guter Näherung auf das Intervall  $[0, \infty]$  gesetzt werden kann, da  $\langle n(\omega) \rangle \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0$ . Bei ferromagnetischer Ordnung ist die Dispersionsrelation für den langwelligen Grenzfall ( $ka \ll 1$ ) gegeben über

$$\omega = \frac{2JSa^2}{\hbar} k^2 \propto k^2 \quad (2.23)$$

mit dem Abstand  $a$  der Gitteratome und dem Spin  $S$ , aufgefasst als klassischer Vektor der Länge  $S$  [7, S. 583ff]. Da die Dispersionsrelation

nur vom Betrag von  $k$  und nicht dessen Richtung abhängt, sind Flächen konstanter Energie im  $k$ -Raum Kugeloberflächen und man erhält für die Zustandsdichte

$$\begin{aligned} D_{fm}(\omega) d\omega &= \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi k^2 dk \\ &= \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{\hbar}{2JSa^2}\right)^{3/2} \sqrt{\omega} d\omega \quad (2.24) \end{aligned}$$

wobei mittels Gleichung (2.23)  $dk$  nach  $d\omega$  substituiert wurde. Einsetzen von Gleichung (2.24) in Gleichung (2.22) und unter Substitution von  $x = \hbar\omega/(k_B T)$  liefert

$$\begin{aligned} n_{mg}^{fm} &= \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{\hbar}{2JSa^2}\right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\omega}}{\exp\left\{\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right\} - 1} d\omega \\ &= \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{k_B T}{2JSa^2}\right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{\exp\{x\} - 1} \\ &= 0,0587 \frac{V}{a^3} \left(\frac{k_B T}{2JS}\right)^{3/2}. \quad (2.25) \end{aligned}$$

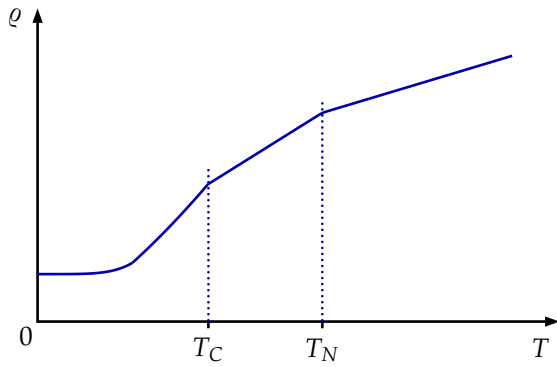
Streuung von Elektronen an den Spinwellen kann nach dem Welle-Teilchendualismus als Streuung von Elektronen an den Magnonen aufgefasst werden, wobei der Streuquerschnitt mit der Gesamtzahldichte der Magnonen skaliert. Damit erhält man bei ferromagnetischer Ordnung:

$$\sigma_{mg}^{fm}(T) \propto n_{mg}^{fm}(T) \propto T^{3/2} \quad (2.26)$$

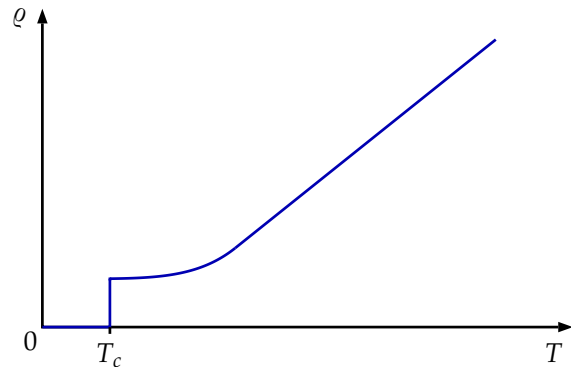
Im Gegensatz zur quadratischen Abhängigkeit der Dispersionsrelation bei ferromagnetischer Ordnung ist diese bei antiferromagnetischer Ordnung linear in  $k$  [7, S. 609] und für den langwelligen Grenzfall ( $ka \ll 1$ ) erhält man

$$\omega = \frac{4|J|S}{\hbar} ka. \quad (2.27)$$

Phononen haben ebenfalls eine lineare Dispersionsrelation, so dass, in Analogie zur Streuung an Phononen (vgl. Abschnitt 2.3), man für



**Abbildung 5:** Schematischer typischer Widerstandsverlauf bei Streuung an Magnonen



**Abbildung 6:** Schematischer typischer Widerstandsverlauf bei Supraleitung

die Temperaturabhängigkeit des spezifischen Widerstandes

$$\rho_{mg}^{afm}(T) \propto n_{mg}^{afm}(T) \propto T \quad (2.28)$$

für  $T \lesssim \Theta$  erhält.

### 2.5.3 Widerstandsverlauf

Für Festkörper mit einer magnetischen Ordnung setzt sich aufgrund der Magnonstreuung der spezifische Widerstand aus drei Komponenten additiv zusammen:

1. Streuung an Verunreinigungen und Defekten (Restwiderstand,  $\rho_0$ )
2. Streuung an Phononen ( $\rho_{ph}$ )
3. Streuung an Magnonen ( $\rho_{mg}$ )

Beim Übergang von ferro- bzw. antiferromagnetisch zu paramagnetisch wird der Beitrag der Magnonstreuung konstant und insgesamt erhält man

$$\rho(T) = \rho_0 + \rho_{ph}(T) + \begin{cases} \rho_{mg}^{fm}(T) & ; T < T_C \\ \rho_{mg}^{afm}(T) & ; T_C \leq T < T_N \\ \rho_{mg}^{afm}(T_N) & ; T \geq T_N \end{cases} \quad (2.29)$$

mit der Curie- bzw. Néel-Temperatur  $T_C$  bzw.  $T_N$  (siehe Abbildung 5).

## 3 Supraleitung

Die Supraleitung wurde 1911 von *Onnes* an destilliertem Quecksilber entdeckt und ist seit dem für fast alle Metalle und viele Metallverbindungen nachgewiesen worden. Unterhalb der kritischen Temperatur  $T_c$  (auch Sprungtemperatur genannt) geht ein normaler Leiter in den supraleitenden Zustand über, wobei der Widerstand des Leiters verschwindet ( $\rho = 0$ ). Der Charakter der Supraleitung entspricht einer physikalischen Phase und unterscheidet sich somit von einem idealen Leiter – bei der Supraleitung erfolgt der Phasenwechsel abrupt, ist eindeutig durch die physikalischen Parameter  $T$  und  $B$  festgelegt und unabhängig vom Prozessweg. Wichtige Eigenschaften der Supraleitung sind

- ▶ Abruptes Verschwinden des elektrischen Widerstandes ( $\rho(T \leq T_c) = 0$ ).
- ▶ Idealer Diamagnetismus ( $\chi = -1$ ).
- ▶ Isotopeneffekt (Verknüpfung der Sprungtemperatur mit der Masse der Kristallgitteratome über  $T_c(M) \propto M^{-0,5}$ ).
- ▶ Auftreten einer Energielücke  $2\Delta$ .
- ▶ Flussquantisierung bei geschlossenen supraleitenden Stromkreisen ( $\Phi = n\Phi_0$ ).

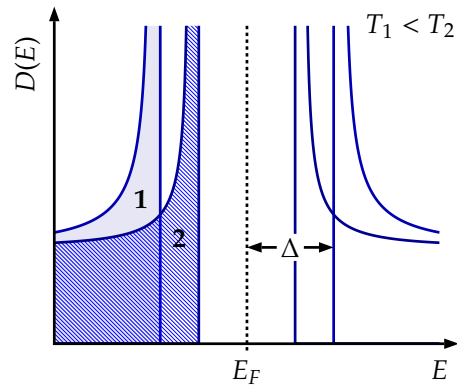


### 3.1 Cooper-Paar-Modell

Ein atomistische Theorie zur Supraleitung wurde 1957 von *Bardeen, Cooper und Schrieffer* (BCS-Theorie) entwickelt und basiert auf der attraktiven Kopplung von zwei Elektronen zu einem Cooper-Paar. Bewegt sich ein Leitungselektron durch das Kristallgitter, so deformiert es durch seine Wechselwirkung mit den positiven Atomrümpfen das Gitter und führt zu einer lokalen Erhöhung der positiven Ladungsdichte. Aufgrund der wesentlich höheren Masse der Atomrümpfe verschwindet diese Erhöhung nicht sofort wieder, sondern bleibt für einige Zeit bestehen. Ein anderes Elektron, das sich antiparallel zum ersten bewegt (d. h.  $p_1 = -p_2$ ), sieht die positive Ladungsträgerdichte und wird durch diese angezogen. Ist die dadurch resultierende Energieabsenkung  $2\Delta$  größer als die Coulomb-Abstoßung, so koppeln beide Elektronen zu einem Cooper-Paar – dies kann jedoch nur passieren, wenn sowohl Impuls als auch der Spin der beiden Elektronen antiparallel zueinander ausgerichtet sind. Die Deformation des Gitter durch die Elektronen entspricht einer Anregung von Gitterschwingungen und somit, vgl. Abschnitt 2.3, der Erzeugung von Phononen, wobei die Bindung des Cooper-Paares durch den Austausch von virtuellen Phononen beschrieben werden kann<sup>6</sup>. Die Bindung zu Cooper-Paaren ist dabei jeweils nur kurz, in jedem Zeitintervall binden unterschiedliche Elektronen zu Cooper-Paaren.

Im Modell des freien Elektronengases (Fermigas) können aufgrund des Pauli-Prinzips zunächst nur Elektronen am Rand der Fermikugel zu Cooper-Paaren binden, da für  $E < E_F - k_B T$  bereits alle Zustände besetzt sind. Bei niedrigeren Temperaturen können

<sup>6</sup> Die Austauschteilchen heißen virtuelle Phononen, weil sie nicht als dauernde Schwingungsanregung im Gitter bestehen bleiben, sondern nur während der kurzen Kopplungszeit.



**Abbildung 7:** Zustandsdichte der ungepaarten Einelektronenzustände im supraleitenden Zustand im Bereich der Fermienergie  $E_F$ .

dann immer mehr Cooper-Paare kondensieren. Die Energieabsenkung durch die Paar-Bildung kann als Bindungsenergie interpretiert werden und in der Umgebung der Fermie-Energie ist die Zustandsdichte  $D_S(E)$  im supraleitenden Zustand in der BCS-Theorie gegeben über

$$D_S(E) = D_N(E) \frac{E - E_F}{\sqrt{(E - E_F)^2 - \Delta^2}} \quad (3.1)$$

mit der Zustandsdichte im normalleitenden Zustand  $D_N(E)$  und der temperaturabhängigen Bindungsenergie  $2\Delta(T)$ . Anhand von Gleichung (3.1) sieht man, dass es für  $|E - E_F| < \Delta$  keine reelle Lösung gibt und somit in der Besetzungsverteilung eine verbotene Zone existiert. Die Breite dieser verbotenen Zone beträgt  $\Delta E = 2\Delta$  und wird bei zunehmender Temperatur kleiner, bis sie bei  $T = T_c$  verschwindet ( $\Delta(T \geq T_c) = 0$ ) (siehe Abbildung 7). Andererseits kann  $\Delta$  für  $T = 0$  aus der BCS-Theorie bestimmt werden über

$$\begin{aligned} \Delta(T = 0) &= \frac{2k_B T_C}{1,14} \\ &= 2\hbar\omega_D \exp\left\{-\frac{1}{V_0 Z(E_F)}\right\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

mit dem Wechselwirkungsmatrixelement  $V_0$  und der Zustandsdichte der Paarzustände an der Fermikante  $Z(E_F) = \frac{1}{2}D(E_F)$  [6]. Die Vorher-

sagen der BCS-Theorie mit den experimentellen Befunden stimmen sehr gut überein, wobei die Abweichungen durch die Approximation  $V_0 = \text{const.}$  erklärt werden können (Approximation erster Ordnung).

### 3.2 Suprastrom

Charakteristisch für die Supraleitung ist der Suprastrom. Dieser ist durch die starke Kohärenz der Paarwellen in einem Raumbereich begründet, wobei alle Cooper-Paare im Kohärenzvolumen  $\xi^3$  nur kollektiv beeinflusst werden können. Eine Abschätzung für die Kohärenzlänge  $\xi$  erfolgt über die Heisenberg'sche Unschärferelation. Mit der Energieunschärfe  $2\Delta$  der Paarwelle ergibt sich für die Impulsunschärfe  $\Delta p = \frac{2m\Delta}{\hbar k_F}$  und mit  $\xi \cdot \Delta p \approx \hbar$  die Kohärenzlänge

$$\xi \approx \frac{E_F}{k_F \Delta'} \quad (3.3)$$

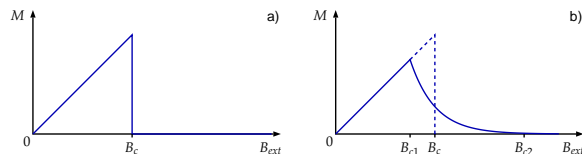
die auch unter Stromfluss erhalten bleibt (andernfalls müssten alle Cooper-Paare in dem Kohärenzvolumen aufgebrochen werden, was sehr unwahrscheinlich ist).

### 3.3 Supraleiter 1. und 2. Art

Die verschiedenen Supraleiter lassen sich in zwei Typen unterscheiden, wobei die Theorie von Ginzburg und Landau ein Kriterium für die Einteilung angibt.

#### ► Supraleiter 1. Art

Bis auf eine dünne Schicht an der Oberfläche werden magnetische Feldlinien aus dem Supraleiter herausgedrängt (charakteristisches Maß für die Oberflächenschicht ist die (*Londonsche*) Eindringtiefe) – die sogenannte Meißner-Phase. Die Magnetisierung steigt bei zunehmenden äußeren Magnetfeld, bis sie schlagartig beim



**Abbildung 8:** Magnetisierung des Supraleiters in Abhängigkeit des äußeren Feldes: a) 1. Art, b) 2. Art

Erreichen des kritischen Feldes  $B_c$  zusammenbricht und vom supraleitenden in den normalleitenden Zustand übergeht (Abbildung 8 a)). Dieser Phasenübergang erfolgt auch, wenn die Stromdichte im Supraleiter einen kritischen Wert  $J_c$  überschreitet.

#### ► Supraleiter 2. Art

Bei diesem Supraleitertyp gibt es zwei kritische Magnetfelder. Bis zu einem unteren kritischen Feld  $B_{c1}$  befinden sie sich wie Supraleiter 1. Art in der Meißner-Phase. Oberhalb  $B_{c1}$  dringt der magnetische Fluss in sogenannten Flussschläuchen (Vortex) in das Material ein und die Magnetisierung klingt langsam ab – die sogenannte Shubnikov-Phase. Ab einem oberen kritischen Magnetfeld  $B_{c2}$  wird der supraleitende Zustand zerstört und der normalleitende Zustand tritt ein (Abbildung 8 b)).

## 4 Untersuchte Materialien und zugehörige Widerstandsverläufe

Für die in diesem Versuch untersuchten vier verschiedenen Materialien werden die folgenden Widerstandsverläufe erwartet:

#### ► Kupfer:

Kupfer stellt ein normales Metall dar, so dass die Streuung an Phononen dominiert.

Da Kupfer nicht vollständig rein gewonnen werden kann, wird zusätzlich ein messbarer Restwiderstand erwartet – also ein Verlauf wie Kurve 2/3 in Abbildung 1.

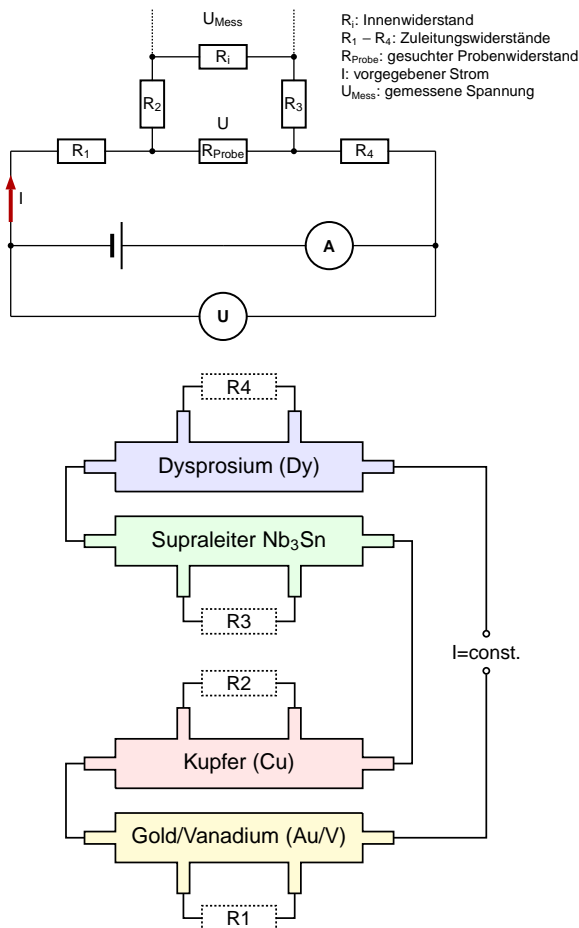
- ▶ **Gold mit ein Atomprozent Vanadium:**  
Gold stellt wie Kupfer ein normales Metall dar, welches mit einer großen Reinheit und geringer Anzahl an Gitterdefekten gewonnen werden kann. Reines Gold würde vom Widerstandsverlauf fast einem idealen Metall ohne Restwiderstand entsprechen (Kurve 1 in Abbildung 1). Die gezielte Verunreinigung mit Vanadium bringt durch die nicht abgesättigte 3d-Schale Spins mit ein und man erwartet den Widerstandsverlauf nach dem Kondo-Effekt (Abbildung 2).
- ▶ **Dysprosium:**  
Dysprosium besitzt eine spontane magnetische Ordnung. Dabei geht es, von tiefen Temperaturen ausgehend, vom ferromagnetischen, über den antiferromagnetischen in den paramagnetischen Zustand über. Der Übergang zwischen ferro- und antiferromagnetisch ist bei Dysprosium begründet in der günstigeren Energiekonfiguration – ab der Curie-Temperatur und der zugehörige thermische Energie ist eine antiparallel Anordnung der magnetischen Momente energetisch niedriger. Erwartet wird also ein Widerstandsverlauf, wie er in Abbildung 5 dargestellt ist, wobei es durch die drei verschiedenen magnetischen Zustände zwei Knicke in der Kurve geben und sowohl die Curie- wie auch die Néel-Temperatur sichtbar werden sollte.
- ▶ **Nb<sub>3</sub>Sn-Supraleiter:**  
Hier wird ein Widerstandsverlauf, wie er in Abbildung 6 dargestellt ist, erwartet. Bei Temperaturen oberhalb der Sprungtemperatur sollte sich der Supraleiter wie ein normales Metall verhalten.

## 5 Experimenteller Aufbau und Durchführung

Für die Durchführung des Versuchs benötigen wir neben den verschiedenen Proben eine Konstantstromquelle – im Versuch wurde der Strom auf 300 mA eingestellt. Diesen Strom leiten wir durch die vier untersuchten Proben (siehe Abbildung 9) und messen im Anschluss den Spannungsabfall an diesen. Unter Einbeziehung der Probengeometrie lässt sich dann der spezifische Widerstand der Probe bestimmen. Parallel hierzu erfassen wir ebenfalls die Temperatur. Dazu nutzen wir die  $R(T)$ -Charakteristik einer Halbleiterdiode, wobei bei steigender Temperatur der Durchlasswiderstand der Diode sinkt und somit auch die Schwellenspannung der Diode. Je nach Diodentyp ist dies über weite Temperaturbereiche annähernd linear (nicht-lineare Fehler im Bereich  $\pm 1 - \pm 3\%$ ), wobei GaAs-Dioden bis Temperaturen von 2 K als Thermometer eingesetzt werden können, wohingegen bei anderen Diodentypen im kryogenen Temperaturbereich eine Linearisierung der  $R(T)$ -Charakteristik notwendig ist [12, S. 117ff]. Alle Proben werden nacheinander mit einem Messintervall von je 10 s gemessen (zirkuläre Messung) und die Abkühlrate auf 0,2–0,3 K je Messintervall eingestellt. Die Kühlung der Probe, die sich in einem Kryostaten befindet, erfolgt dabei über eine Kaltplatte, die mittels flüssigem Helium gekühlt wird, wobei die Kühlrate über den Heliumfluss geregelt werden kann. Eine zusätzliche Wärmeisolierung der Proben erfolgt über die Evakuierung des Kryostaten ( $p \sim 10^{-3}$  mbar). Für weitere Möglichkeiten der Reduzierung von Wärmelecks wird die Wärmestromgleichung

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lambda \frac{A}{l} \Delta T \quad (5.1)$$

mit der transportierten Wärmemenge pro Zeit  $\Delta Q/\Delta t$ , dem Wärmeleitfähigkeitskoeffizienten



**Abbildung 9:** Versuchsaufbau. a) Schaltbild einer Probe in Vierpunktgeometrie. b) Reihenschaltung der vier zu untersuchenden Proben.

des Materials  $\lambda$ , der Querschnittsfläche des Wärmeleiters  $A$ , der Temperaturdifferenz zwischen Anfang und Ende des Wärmeleiters und der Länge des Wärmeleiters  $l$ , auf der die Temperaturdifferenz herrscht, betrachtet, wobei der Wärmestrom minimiert werden soll. Wärmelecks stellen die elektrischen Zuleitungen dar, wobei man anhand der Wärmestromgleichung erkennt, dass der Querschnitt der Zuleitungen klein gehalten werden soll. Die Leitungslänge sollte dabei lang gewählt werden, wobei die Zuleitungen an den Heliumzuleitungen durch Umwickeln abgefangen wird. Weiterhin können – neben der Evakuierung des Kryostaten – durch geeignete Materialwahl

Wärmeströme minimiert werden, z. B. für das Stativ des Aufbaus (Verwendung von Materialien mit kleinem Wärmeleitfähigkeitskoeffizienten  $\gamma$ ).

Nach Aktivierung der Vakuumpumpen und des Heliumflusses verläuft die Messung weitgehend automatisch, die Messaufnahmesoftware bestimmt zyklisch die Temperatur sowie die Spannung durch die Proben und berechnet daraus, unter Berücksichtigung der Probengeometrie, den spezifischen Widerstand. Während der Messung muss nur darauf geachtet werden, dass die Abkühlrate in dem oben angegebenen Bereich liegt, so dass die Messungen im näherungsweise thermischen Gleichgewicht stattfindet. Dazu ist es möglich, den Heliumdurchfluss mit einem Stellrad nachzuregeln. Für die Auswertung stehen die Messdaten als ASCII-Datei zur Verfügung.

Um eine hinreichend genaue Bestimmung des Probenwiderstandes zu ermöglichen wird die Probe durch vier Verbindungen kontaktiert – die sogenannte Vierpunktgeometrie. Das Ersatzschaltbild ist in Abbildung 9 dargestellt. Hier sind  $R_1$  und  $R_2$  die Kontakt- und Zuleitungswiderstände des Stromes,  $R_2$  und  $R_3$  die der Spannungsmessung. Der Innenwiderstand der Spannungsmessung  $R_i$  ist im Verhältnis zu den restlichen beteiligten Widerständen sehr groß und kann als gegen unendlich strebend angenommen werden. Bedingt durch diesen Umstand können wir den Strom durch das Spannungsmessgerät gleich Null, d. h.  $I_{Probe} = I$  setzen, wodurch an den Widerständen  $R_2$  und  $R_3$  keine Spannung abfällt. Demnach erhalten wir für den Probenwiderstand

$$R_{Probe} = \frac{U_{Mess}}{I} \quad (5.2)$$

## 6 Auswertung der Proben

### 6.1 Kupferprobe

In Abbildung 10 wurde der spezifische Widerstand von Kupfer in Abhängigkeit von der Temperatur dargestellt und entspricht dem erwarteten Verlauf (vgl. Abschnitt 4). Bei der untersuchten Kupferprobe besteht zwischen Temperatur und Widerstand ab etwa 60 K eine lineare Beziehung. Bis etwa 60 K ist der Widerstand proportional zu  $T^5$ , wobei bei Temperaturen unterhalb  $\sim 25$  K die Änderung der Temperatur nur noch einen geringen Einfluss auf den Widerstand hat – hier dominiert sehr stark die Streuung an den Verunreinigungen.

Die Kupferprobe weist einen relativ hohen Restwiderstand auf und konnte bestimmt werden zu

$$\rho_0 = (141,48 \pm 0,05) \mu\Omega\text{cm}^2/\text{m}$$

In der Literatur werden für sehr reines Kupfer Widerstandswerte bei 4,2 K von  $\sim 0,2 \mu\Omega\text{cm}^2/\text{m}$  angegeben (Washburn [13, S. 132], Meechan und Brinkman [11]). Ursächlich für den wesentlich höheren Restwiderstand (drei Größenordnungen) sind sowohl Verunreinigungen der Probe als auch die Kontaktierung, wodurch zusätzliche Übergangswiderstände auftreten, anzunehmen. Diese Annahme kann dadurch begründet werden, da bei Raumtemperatur ( $T \sim 300$  K) der spezifische Widerstand um den Faktor  $\sim 1,9$  höher ist als der Literaturwert für Kupfer mit einem Reinheitsgrad von 99,9% mit  $\rho_{\text{Cu}}(T = 300 \text{ K}) = 172 \mu\Omega\text{cm}^2/\text{m}$  (Washburn [13, S. 136]).

### 6.2 Gold mit 1% Vanadium

Abbildung 11 zeigt den Widerstandsverlauf von Gold, das mit einem Atomprozent Vanadium verunreinigt ist – wie erwartet steigt durch

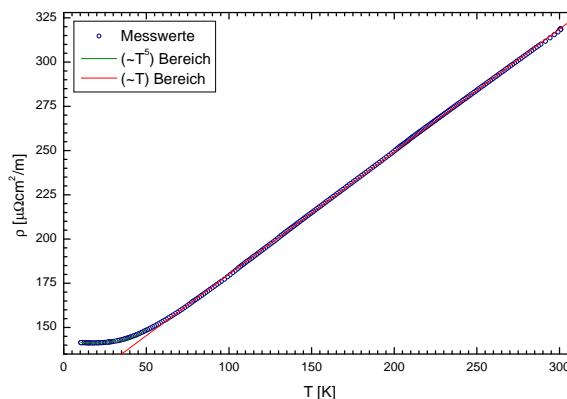


Abbildung 10: Widerstandsverlauf als Funktion der Temperatur bei Kupfer

die magnetischen Momente von Vanadium bei kleinen Temperaturen der Widerstand und der Kondoeffekt tritt auf. Aus dem Graphen konnte eine Kondotemperatur  $T_{K,G}$  von

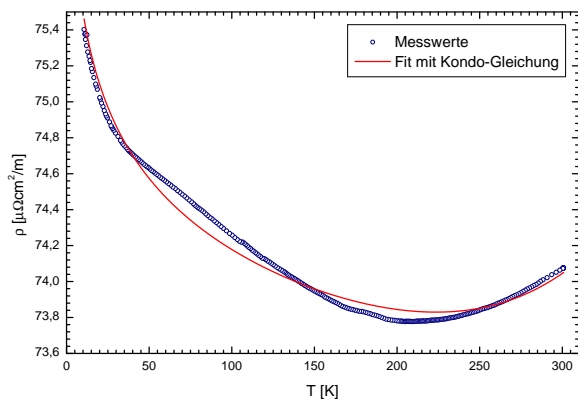
$$T_{K,G} = (210 \pm 5) \text{ K}$$

ermittelt und der Fehler abgeschätzt werden. Die Messwerte wurden gemäß dem theoretischen Modell des Kondoeffekts (Gleichung (2.18b)) angefüttet, wobei die Fit-Parameter Tabelle 1 zu entnehmen sind. Demzufolge ergab sich entsprechend Gleichung (2.19) ein Wert für die Kondotemperatur  $T_{K,F}$  von

$$T_{K,F} = (224 \pm 2) \text{ K}$$

Dabei wurde der Messfehler, im Sinne des Größtfehlers, nach dem linearen Fehlerfortpflanzungsgesetz abgeschätzt. Kume [10] erhielt für Gold mit 1,1% Vanadium eine Kondotemperatur von  $\sim 235$  K – da die Kondotemperatur proportional zu  $c^{1/5}$  ist, erhält man damit  $T_K(1\%) \sim 230$  K. Die experimentell bestimmte Kondotemperatur liegt also niedriger als diejenige, die Kume veröffentlicht hat – jedoch im selben Temperaturbereich (Abweichungen 9% bzw. 3%).

Betrachtet man die bis jetzt erhaltenen Resultate, so wird ersichtlich, dass die betrachtete Theorie des Kondoeffekts diesen offenbar nicht



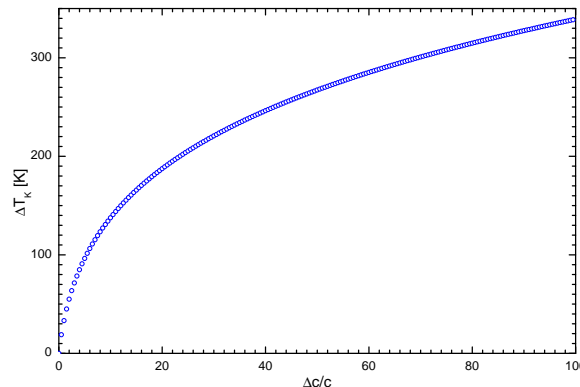
**Abbildung 11:** Widerstandsverlauf bei Gold mit einem Atomprozent Vanadium

vollständig beschreibt. Dies wird zum Beispiel anhand der Abbildung 11 deutlich, da dort die Fit- und die Messkurve nur in den Randbereichen übereinstimmen. Zudem weist der logarithmische Teil von Gleichung (2.18b) darauf hin, dass nicht alle wesentlichen Aspekte des Kondoeffekts berücksichtigt wurden. Die Annahme, dass für  $T \rightarrow 0$  der Widerstand logarithmisch divergiert ist unphysikalisch. Dieses Dilemma wird im Rahmen einer erweiterten Kondotheorie vermieden. Bei genauerer Betrachtung findet man, dass unterhalb einer bestimmten Temperatur die Kurve wieder abflacht [5]. Weiterhin können Verunreinigungen der Probe und die Kontaktierung, wie auch schon beim Kupfer beobachtet, zu Veränderungen der  $\rho(T)$ -Charakteristik führen und die Abweichungen zwischen experimenteller und theoretischer Kurve erklären.

Eine Variation der Konzentration der einlegierten Fremdatome bewirkt eine Verschie-

**Tabelle 1:** Fit-Parameter für Kondo-Modell

a	=	$2,05 \pm 0,06$
c	=	0,01 (fest)
$\tilde{q}_1$	=	$(7,680 \pm 0,002) \cdot 10^{-3}$
$\tilde{q}_2$	=	$(5,73 \pm 0,05) \cdot 10^{-5}$



**Abbildung 12:** Änderung der Kondotemperatur  $\Delta T_K$  in Abhängigkeit von der Konzentration der einlegierten Fremdatome  $\Delta c/c$ .

bung der Kondotemperatur entsprechend Gleichung (2.19). Hierbei lässt sich anmerken, dass die Lage des Minimums – die Lage der Kondotemperatur  $T_K$  – nur relativ schwach von der Konzentrationsänderung  $\Delta c$  abhängt ( $T_K \propto \sqrt[5]{c}$ ). Eine Modifikation der Konzentration um 500 % hat eine Veränderung der Kondotemperatur von ca. 38 % zur Folge.

In Abbildung 12 wurde die Temperaturänderung  $\Delta T_K$  in Abhängigkeit von der Variation der Vanadiumkonzentration dargestellt. Aus dieser Auftragung lässt sich folgern, dass die Änderung der Kondotemperatur nicht nur von der Variation der Fremdatomanzahl abhängig ist, sondern auch von deren schon vorhandener Konzentration. Eine Modifikation der Fremdatomanzahl bewirkt eine größere Änderung der Kondotemperatur bei geringer Vanadiumkonzentration als eine Modifikation ihrer Anzahl bei einer höheren Konzentration. Die Darstellung in Abbildung 12 ist hierbei durch die vorgestellte Kondotheorie begründet. Experimentelle Befunde bestätigen die Verschiebung der Lage des Minimums beim Kondoeffekt. Inwieweit eine Änderung der Kondotemperatur  $\Delta T_K$ , in Abhängigkeit von der Variation der Konzentration der einlegierten Fremdatome  $\Delta c/c$ , in weiten Bereichen

mit dem Experiment übereinstimmt, kann hier mangels Daten nicht geklärt werden.

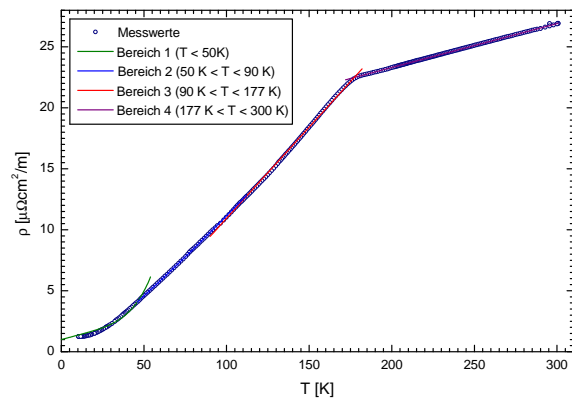
### 6.3 Dysprosium

Abbildung 13 stellt das Verhalten des Widerstandes von Dysprosium in Abhängigkeit von der Temperatur dar, wo zusätzlich zu dem phononischen auch ein magnonischer Widerstandsanteil relevant ist. Der in Abschnitt 4 theoretische erwartete Verlauf wird deutlich. Da Dysprosium drei magnetische Zustände besitzt, ist die Kurve stückweise angefittet worden, wobei für sehr niedrige Temperaturen der phononische  $T^5$ -Anteil dominiert (Gleichung (2.16)), dann im ferromagnetischen Bereich eine Abhängigkeit gemäß  $\rho \propto T + T^{3/2}$  und im antiferromagnetischen wie im paramagnetischen Bereich eine lineare Abhängigkeit  $\rho \propto T$  erwartet wird (Gleichung (2.26), (2.28) und (2.29)). In Tabelle 2 sind die Fitmodelle mit den Fitparametern aufgeführt – es zeigt sich, dass die in den unterschiedlichen Bereichen stückweise Approximation durch die verwendeten Modelle gut den Widerstandsverlauf über weite Bereiche wiedergeben.

Über die Auftragung von  $\frac{\Delta\rho(T)}{\Delta T}$  und  $\frac{\Delta^2\rho(T)}{\Delta T^2}$  konnte die Néel-Temperatur  $T_N$  von Dysprosium bestimmt werden zu

$$T_N = (177 \pm 7) \text{ K},$$

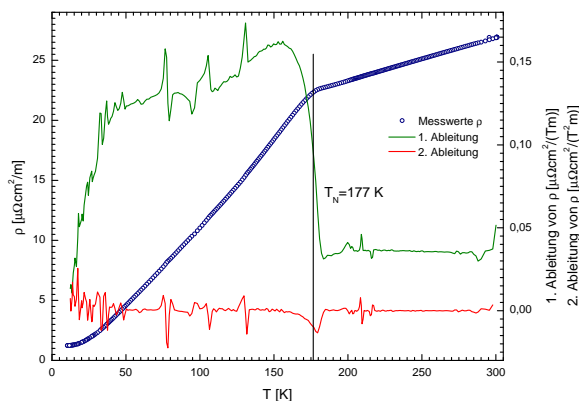
wobei der Fehlerbereich aus der zweifach differentiellen Darstellung entnommen wurde (siehe Abbildung 14). Colvin et al. [2] gibt für die Néel-Temperatur einen Wert von  $T_N = 174 \text{ K}$  und eine Curie-Temperatur von  $T_C = 90 \text{ K}$  an. Während die hier bestimmte Néel-Temperatur mit der von Colvin et al. übereinstimmt, konnte die Curie-Temperatur nicht eindeutig identifiziert werden. Zwar liegt in dem Bereich um  $90 \text{ K}$  eine Sprungstelle in der Ableitung vor, durch die stärkeren Fluktuationen in diesem Temperaturbereich kann aber nicht wirklich



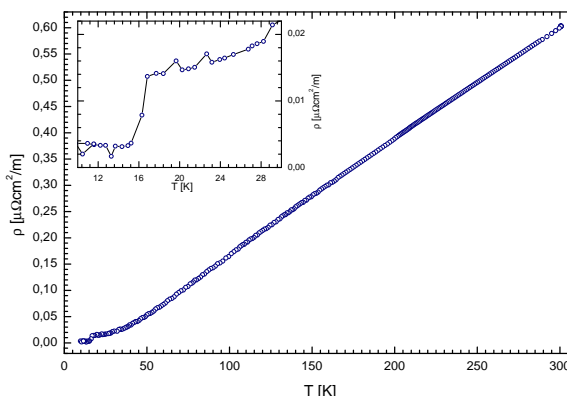
**Abbildung 13:** Temperaturabhängige Entwicklung des Widerstandes von Dysprosium

1. Bereich ( $T \leq 50 \text{ K}$ )	
Fit-Modell $\rho = \rho_0 + aT^5 + bT^{3/2}$	
$\rho_0$	$(1,00 \pm 0,11) \mu\Omega\text{cm}^2/\text{m}$
$a$	$(5,2 \pm 0,7) \cdot 10^{-9} \mu\Omega\text{cm}^2/(\text{m} \cdot \text{T}^5)$
$b$	$(0,040 \pm 0,005) \mu\Omega\text{cm}^2/(\text{m} \cdot \text{T}^{2/3})$
$R^2$	95,6 %
2. Bereich ( $50 \text{ K} \leq T \leq 90 \text{ K}$ )	
Fit-Modell $\rho = \tilde{\rho}_0 + cT + dT^{3/2}$	
$\tilde{\rho}_0$	$(-1,12 \pm 0,15) \mu\Omega\text{cm}^2/\text{m}$
$c$	$(0,093 \pm 0,006) \mu\Omega\text{cm}^2/(\text{m} \cdot \text{K})$
$d$	$(3,0 \pm 0,5) \cdot 10^{-3} \mu\Omega\text{cm}^2/(\text{m} \cdot \text{T}^{2/3})$
$R^2$	99,99 %
3. Bereich ( $90 \text{ K} \leq T \leq 177 \text{ K}$ )	
Fit-Modell $\rho = \tilde{\tilde{\rho}}_0 + \alpha T$	
$\tilde{\tilde{\rho}}_0$	$(-4,00 \pm 0,07) \mu\Omega\text{cm}^2/\text{m}$
$\alpha$	$(0,1494 \pm 0,0005) \mu\Omega\text{cm}^2/(\text{m} \cdot \text{K})$
$R^2$	99,90 %
4. Bereich ( $177 \text{ K} \leq T \leq 300 \text{ K}$ )	
Fit-Modell $\rho = \tilde{\tilde{\tilde{\rho}}}_0 + \beta T$	
$\tilde{\tilde{\tilde{\rho}}}_0$	$(16,106 \pm 0,013) \mu\Omega\text{cm}^2/\text{m}$
$\beta$	$(0,03600 \pm 0,00005) \mu\Omega\text{cm}^2/(\text{m} \cdot \text{K})$
$R^2$	99,97 %

**Tabelle 2:** Fit-Parameter für Dysprosium



**Abbildung 14:** Differentielle Darstellung des Widerstandsverlaufs von Dysprosium



**Abbildung 15:** Widerstandsverlauf beim Supraleiter Nb<sub>3</sub>Sn

geklärt werden, ob es sich dabei nicht auch nur um Fluktuationen handelt. Leider sind gerade in diesem interessanten Temperaturbereich weniger Messwerte aufgenommen worden, da die Steuerung der Abkühlrate träge verläuft, dadurch schwierig ist, konstant einzustellen, und hier durch Änderungen des Heliumdurchflusses die Abkühlrate gerade verhältnismäßig hoch war – hierdurch sind auch die stärkeren Fluktuationen durch thermisches Nichtgleichgewicht zu erklären.

### 6.4 Nb<sub>3</sub>Sn-Probe

Der Widerstandsverlauf des Supraleiters Nb<sub>3</sub>Sn ist in Abbildung 15 dargestellt. Zu erkennen ist, das sich Nb<sub>3</sub>Sn oberhalb der kritischen Temperatur normal wie ein Metall verhält – bei der Sprungtemperatur verschwindet jedoch der Widerstand und die Legierung geht in den supraleitenden Zustand über (siehe Ausschnittsvergrößerung in Abbildung 15).

Die Sprungtemperatur kann durch Betrachtung der differentiellen Darstellung ermittelt werden, siehe Abbildung 16. An die differentielle Darstellung wurde – zwecks Bestimmung der Sprungtemperatur – ein Peak-Fit (Gauß-Profil) durchgeführt und wir erhalten damit

eine Sprungtemperatur

$$T_C = (16,3 \pm 0,8) \text{ K},$$

wobei der Fehler durch die Halbwertsbreite abgeschätzt wurde. In der Literatur [8] findet man einen Wert von 18,05 K – die von uns bestimmte Temperatur ist um ca. 10 % zu niedrig bestimmt.

Ist die Sprungtemperatur  $T_C$  bekannt, so lässt sich die Energielücke  $2\Delta$  über Gleichung (3.2) und die Kohärenzlänge über

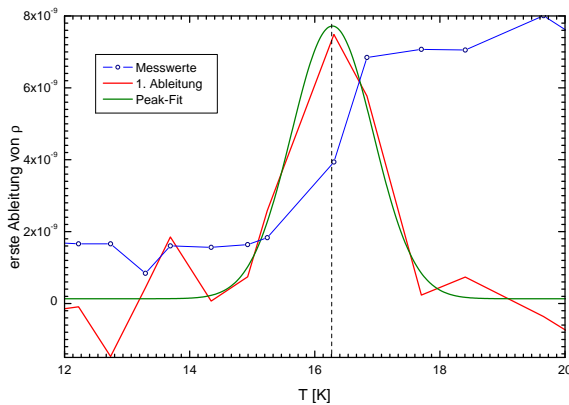
$$\xi_0 \approx \frac{1,14\hbar v_F}{4k_B T_C} \quad (6.1)$$

bestimmen und man erhält, bei einer Annahme der Fermigeschwindigkeit  $v_F$  in der Größenordnung  $\sim 10^6$  m/s:

$$\begin{aligned} 2\Delta &= (4,9 \pm 0,2) \text{ meV} \\ \xi_0 &= (134 \pm 5) \text{ nm} \end{aligned}$$

Dabei wurde für die Bestimmung des Fehlers das lineare Fehlerfortpflanzungsgesetz herangezogen. Bosomworth und Cullen [1] geben für die Energielücke  $2\Delta = (5,30 \pm 0,22) \text{ meV}$  und für die Kohärenzlänge  $\xi \sim 10 \text{ nm}$  an. Bosomworth und Cullen [1] fand jedoch auch, dass nach mechanischem Polieren des Supraleiters sich die Energielücke auf  $\sim 3 \text{ meV}$  erniedrigte. Danach kann die hier bestimmte





**Abbildung 16:** Widerstandsverlauf im Bereich der Sprungtemperatur

Bandlücke von  $\sim 5$  meV bestätigt werden. Die Bestimmte Kohärenzlänge weicht jedoch um eine Größenordnung von der in Bosomworth und Cullen [1], wobei hier der größte Fehler wohl in der groben Abschätzung der Fermigeschwindigkeit zu suchen ist. Benutzt man Gleichung (6.1), den von Bosomworth und Cullen angegebenen Wert für die Kohärenzlänge sowie die bestimmte Sprungtemperatur  $T_C$ , so erhält man für die Fermigeschwindigkeit einen Wert von  $v_F \sim 7,5 \cdot 10^5$  m/s.

Die Energielücke  $2\Delta$  ist die Energie, die aufgewendet werden muss, um ein Cooper-Paar aufzubrechen. Sie entspricht somit im Bild quasifreier Elektronen der Bindungsenergie der Suprastromträger, der Cooper-Paare. Ihr Wert liegt in der Größenordnung von  $10^{-3}$  eV und ist im Vergleich zur Bindungsenergie, die durch Anziehungskräfte zwischen Metallionen und freien Elektronen verursacht wird (einige eV) sehr klein. In metallischen Supraleitern können Elektronen sich nur dann zu Cooper-Paaren verbinden, wenn die thermische Energie des Gitters klein gegenüber der metallischen Bindungsenergie ist. Die Distanz zwischen den Elektronen, bei der die Bindung der Cooper-Paare noch besteht, wird Kohärenzlänge genannt und beträgt in einem typischen Supraleiter einige zehn bis hundert

Nanometer, was dem Vielfachen des Atomabstandes ( $\sim 0,1$  nm) in einem Festkörper entspricht. Die Elektronenanzahl im Kohärenzvolumen  $\xi^3$  kann bei einem typischen Wert der Ladungsträgerdichte von  $\rho_{e^-} \approx 5 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$  abgeschätzt werden zu

$$n_{\xi^3} \approx 1,2 \cdot 10^8$$

Daraus folgt, dass es ca.  $5 \cdot 10^7$  Cooper-Paare in einem Kohärenzvolumen  $\xi^3$ , also dem Volumen eines Cooper-Paars, geben kann.

Eine Einlegierung von ferromagnetischen Materialien, wie zum Beispiel Eisen, würde die Sprungtemperatur erniedrigen. Dies liegt darin begründet, dass sich bei ferromagnetischen Materialien die Spins parallel anordnen (siehe Abschnitt 2.5.1), wohingegen sich Elektronen nur mit entgegengesetztem Spin zu Cooper-Paaren verbinden können (vgl. Abschnitt 3.1). Die hier beobachtete kleinere Sprungtemperatur könnte – neben Effekten durch die Kontaktierung – durch Verunreinigungen des  $\text{Nb}_3\text{Sn}$ -Supraleiters mit einem ferromagnetischen Material verursacht sein, was jedoch eher unwahrscheinlich sein sollte.

## 7 Zusammenfassung

Der Versuch stellt die untersuchten Streumechanismen anschaulich vor. Außerdem wurden die zur exakten Auswertung der gewonnenen Daten eingesetzten Methoden einleuchtend vorgestellt. Allem voran wurde jedoch das Verständnis für die theoretischen Modelle, die zur Beschreibung der beobachteten Effekte herangezogen wurden, gefördert. Einige dieser theoretischen Modelle erwiesen sich, trotz ihrer Komplexität, nur als bedingt vollständig. Zum Beispiel konnte bei der Untersuchung des Kondoeffekts die Unvollständigkeit des theoretischen Modells dargelegt werden.

Bei der Auswertung der einzelnen untersuchten Proben wurde festgestellt, dass die gewonnenen Ergebnisse teilweise sehr große Abweichungen zu den in der Literatur angegebenen Werten aufweisen. Dies konnte größtenteils auf systematische Fehler durch Verunreinigungen oder der Kontaktierung der Proben erklärt werden, da sich in dem untersuchten Tieftemperaturbereich bereits kleine Störungen stärker bemerkbar machen. Der Restwiderstand von Kupfer konnte dabei zu  $(141,48 \pm 0,05) \mu\Omega\text{cm}^2/\text{m}$  bestimmt werden und liegt um drei Größenordnungen höher als derjenige von reinem Kupfer. Für die Kondotemperatur der Gold-Vanadium-Legierung erhielten wir einen Wert von  $\sim 220 \text{ K}$ , was im Bereich der von Kume [10] publizierten Temperatur liegt. Mit dem angegebenen Wert von Colvin et al. [2] stimmt die hier ermittelte Néel-Temperatur  $T_N = (177 \pm 7) \text{ K}$  von Dysprosium überein, die Curie-Temperatur konnte jedoch aufgrund größerer Fluktuationen im relevanten Temperaturbereich nicht eindeutig bestimmt werden. Bei der Sprungtemperatur von  $\text{Nb}_3\text{Sn}$  gab es eine Abweichung vom Literaturwert von ca. 10% hin zu tieferen Temperaturen und konnte bestimmt werden zu  $(16,3 \pm 0,8) \text{ K}$ . Insgesamt konnten die in Abschnitt 4 aufgeführten theoretisch erwarteten Widerstandsverläufe für die unterschiedlichen Proben auch experimentell beobachtet werden.

## Literatur

---

- [1] D. R. Boserworth und G. W. Cullen. Energy Gap of Superconducting Nb<sub>3</sub>Sn. *Phys. Rev.*, 160(2):346–347, Aug 1967. DOI: 10.1103/PhysRev.160.346.
- [2] R. V. Colvin, S. Legvold, und F. H. Spedding. Electrical Resistivity of the Heavy Rare-Earth Metals. *Physical Review*, 120(3):741–745, 1960. DOI: 10.1103/PhysRev.120.741.
- [3] W. J. de Haas, G. J. Van Den Berg, und H. B. G. Casimir. The electrical resistance of gold, copper and lead at low temperatures. *Physica*, 1:1115–1124, 1934. DOI: 10.1016/S0031-8914(34)80310-2.
- [4] Martin Dressel, Kurt Laßmann, und Marc Scheffler. Drudes Weg zur Festkörperphysik. *Physik Journal*, 5(7):41–47, 2006.
- [5] Christian Enns und Siegfried Hunklinger. *Tieftemperaturphysik*. Springer Verlag, 1. Auflage, 2000. ISBN 3-540-67674-0.
- [6] Melanie Ewerlin und Dirk Sprungmann. *Versuch 505 – Widerstand bei tiefen Temperaturen*. Institut für Experimentalphysik IV / Festkörperphysik der Ruhr Universität Bochum, 2007. Versuchsanleitung zum Praktikum für Fortgeschrittene an der Ruhr-Universität Bochum, Version vom 27.11.2007.
- [7] Rudolf Gross und Achim Marx. Festkörperphysik. Vorlesungsskript zur Vorlesung im WS 2004/2005, Walther-Meissner-Institut. Lehrstuhl für Technische Physik. Garching., 2004.
- [8] C. Kittel. *Introduction to Solid State Physics*. John Wiley & Sons, 1996. ISBN 0-471-11181-3.
- [9] J. Kondo. Resistance minimum in dilute magnetic alloys. *Progress of Theoretical Physics*, 32:37–49, 1964.
- [10] Kiyoshi Kume. Anomalies Due to s-d Interaction in Dilute Au-V Alloys. *Journal of the Physical Society of Japan*, 23(6):1226–1234, 1967. DOI: 10.1143/JPSJ.23.1226.
- [11] C. J. Meechan und J. A. Brinkman. Electrical Resistivity Study of Lattice Defects Introduced in Copper by 1.25-Mev Electron Irradiation at 80°K. *Physical Review*, 103(5):1193–1202, 1956. DOI: 10.1103/PhysRev.103.1193.
- [12] L. Michalski, K. Eckersdorf, J. Kucharski, und J. McGhee. *Temperature measurement*. John Wiley & Sons, 2. Auflage, 2001. ISBN 0-471-86779-9.
- [13] E. W. Washburn (Hrsg.). *International Critical Tables of Numerical Data, Physics, Chemistry and Technology*, Volume VI. Knovel, erste elektronische Auflage, 2003.

### Liste der Versionen

Version	Datum	Bearbeiter	Bemerkung
0.9	27.08.2009	Kat/Krä	Versuchsdurchführung
1.0	08.09.2009	Kat/Krä	Versuchsauswertung
1.1	06.10.2009	Kat/Krä	Korrekturen