

A5 – Trägheitsmoment

Physikpraktikum

Tobias Krähling
eMail: <Tobias.Kraehling@SemiByte.de>
Homepage: <www.SemiByte.de>

13.03.2007
Version: 1.0

Stichworte: Drehmoment, Drehimpuls, Trägheitsmoment, Berechnung von Trägheitsmomenten, Differentialgleichung für ungedämpfte Schwingung, Drehpendel, Steiner'scher Satz, Definition des Schwerpunktes, Trägheitstensor, Trägheitsellipsoid

Literatur: [Dem06], [Kuc94], [Mey06], [Tip98], [Wal94]

Inhaltsverzeichnis

1. Aufgabenstellung	2
2. Grundlagen zu den Versuchen	2
2.1 Herleitung der Gleichungen	3
3. Versuchsaufbauten und -durchführung	4
3.1 Aufgabe 1	4
3.2 Aufgabe 2	4
3.3 Aufgabe 3	5
3.4 Aufgabe 4	5
4. Meßwerte	5
4.1 Aufgabe 1	5
4.2 Aufgabe 2	6
4.3 Aufgabe 3	6
4.4 Aufgabe 4	7
5. Auswertung und Fehlerrechnung	7
5.1 Aufgabe 1	7
5.2 Aufgabe 2	8
5.3 Aufgabe 3	9
5.3.1 Kugel	9
5.3.2 Metallscheibe	9
5.4 Aufgabe 4	10
6. Bewertung und Vergleich der Daten	11
7. verwendete Geräte	11
Literatur	12

1. Aufgabenstellung

1. Bestimmung des Richtmomentes der Feder
2. Bestimmung des Trägheitsmomentes eines Kunststoff-Vollzylinders.
3. Bestimmung des Trägheitsmomentes einer Holzkugel und einer Metallplatte.
4. Bestimmung der Metallplattenträgheitsmomente, wenn die Drehachse nicht durch den Schwerpunkt verläuft und Überprüfung des Steiner'schen Satzes.

2. Grundlagen zu den Versuchen

Ist ein Körper um eine feste Achse drehbar, so übt eine Kraft, deren Wirklinie nicht durch den Schwerpunkt verläuft, ein Drehmoment auf diesen Körper aus und versetzt diesen in eine Rotationsbewegung. Das Drehmoment \vec{M} lässt sich bestimmen durch

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (1)$$

mit \vec{r} als Abstand von Angriffspunkt und Schwerpunkt. Der Drehimpuls \vec{L} ist analog zur Translation definiert:

$$\vec{L} = t\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}) \quad \text{bzw.} \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad (2)$$

Der Drehimpuls zeigt immer in die Normalenrichtung senkrecht zur Ebene und bildet eine Rechtsschraube.

Bei Rotationsbewegungen spielt die Massenverteilung im Bezug auf eine Rotationsachse eine Rolle und wird als Trägheitsmoment J bezeichnet. Dieses kann über die Beziehung

$$J = \int_V r^2 dm \quad \text{bzw.} \quad J = \int_V r^2 \rho dV \quad (3)$$

bestimmt werden.

Verläuft die Drehachse nicht durch den Schwerpunkt des Körpers, so kann das zugehörige Trägheitsmoment über den *Satz von Steiner* bestimmt werden:

$$J = J_S + a^2 M \quad (4)$$

(a kennzeichnet den senkrechten Abstand zwischen Drehachse und Schwerpunkt, J_S das Trägheitsmoment bei paralleler Achse durch den Mittelpunkt).

Bei Drehschwingungen einer Feder wirkt dessen Richtmoment D (analog zur Federkonstanten bei transversalen Schwingung einer Feder), das rücktreibende Drehmoment einer Feder beträgt dann

$$M = -D\varphi \quad (5)$$

Die Bewegungsgleichung

$$M = J \frac{d\omega}{dt} = J \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (6)$$

lautet dann für eine Drehschwingung mit einer Feder:

$$J\ddot{\varphi} = -D\varphi. \quad (7)$$

Mit der Anfangsbedingung $\varphi(0) = 0$ erhält man als Lösung

$$\varphi = a \sin\left(\sqrt{\frac{D}{J}}t\right) \quad (8)$$

und für die Schwingungsdauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}} \quad (9)$$

2.1 Herleitung der Gleichungen

Für den Drehtisch mit aufgesetzter Tragplatte gilt für die Schwingungsdauer T_1 die Beziehung:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_0}{D}} \quad (10)$$

Mit dem Metall-Hohlzylinder erhöht sich das Trägheitsmoment des gesamten Aufbaus um den des Zylinder, d. h. $J = J_0 + J_M$.

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + J_M}{D}} \quad (11)$$

Bildet man die Differenz aus den Quadraten der Zeiten, so kann das Richtmoment der Feder bestimmt werden:

$$\begin{aligned} T_2 - T_1 &= 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + J_M}{D}} - 2\pi \sqrt{\frac{J_0}{D}} \\ T_2^2 - T_1^2 &= 4\pi^2 \frac{J_0 + J_M - J_0}{D} \\ D &= 4\pi^2 \frac{J_M}{T_2^2 - T_1^2} \end{aligned} \quad (12)$$

Da das Richtmoment der Feder konstant bleibt, kann für die Bestimmung des Trägheitsmomentes des Kunststoff-Vollzylinders J_{VZ} Gl. 12 verwendet werden.

$$\begin{aligned} D &= \frac{4\pi J_M}{T_2^2 - T_1^2} = \frac{4\pi J_{VZ}}{T_3^2 - T_1^2} \\ J_{VZ} &= J_M \frac{T_3^2 - T_1^2}{T_2^2 - T_1^2} \end{aligned} \quad (13)$$

Das Trägheitsmoment eines Vollzylinders läßt sich aus Gl. 3 mit $dV = r d\varphi dr dz$, $r = [0, R]$, $\varphi = [0, 2\pi]$, $z = [0, L]$ bestimmen über:

$$\begin{aligned} J &= \rho \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 dr d\varphi dz \\ &= \rho \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} R^4 d\varphi dz \\ &= \rho \int_0^L \frac{1}{2} \pi R^4 dz = \frac{1}{2} \rho \pi R^4 L \end{aligned}$$

und mit $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi L R^2}$

$$I = \frac{1}{2} m R^2 \quad (14)$$

Für einen Hohlzylinder paßt man die Parametrisierung an: $r = [R_i, R_A]$; $\rho = \frac{m}{\pi L(R_A^2 - R_i^2)}$ und erhält:

$$I = \frac{1}{2}m(R_A^2 + R_i^2) \quad (15)$$

Das Trägheitsmoment einer Kugel kann einfach über Kugelkoordinaten mit der Parametrisierung $r = [0, R]$, $\varphi = [0, 2\pi]$, $\vartheta = [0, \pi]$, $dV = r^2 \sin^3 \vartheta dr d\vartheta d\varphi$ berechnet werden:

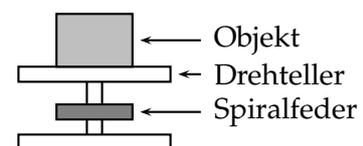
$$\begin{aligned} I &= \rho \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R r^4 \sin^3 \vartheta dr d\vartheta d\varphi \\ &= \rho \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{5} R^5 \sin^3 \vartheta d\vartheta d\varphi \\ &= \frac{2}{5} \pi \rho R^5 \int_0^{2\pi} \sin^3 \vartheta d\vartheta \\ &= \frac{8}{15} \pi \rho R^5 \end{aligned}$$

und mit $\rho = \frac{m}{V} = \frac{3}{4} \frac{m}{\pi R^3}$

$$I = \frac{2}{5} m R^2 \quad (16)$$

3. Versuchsaufbauten und -durchführung

Die Schwingzeit der einzelnen Aufbauten wird jeweils für n Schwingungen (5-10) gemessen und anschließend auf eine Schwingung mittels $T = \frac{t}{n}$ umgerechnet. Die Bestimmung der Schwingzeiten für n Schwingungen wird mehrfach durchgeführt (ca. 5-10).



3.1 Aufgabe 1

- Abmessungen des Metall-Hohlzylinders (Höhe, Innen- und Außendurchmesser) bestimmen, Masse wägen;
- Justage des Drehtisches und Tragplatte;
- Bestimmung der Schwingzeit des Drehtisches mit aufgesetzter Tragplatte;
- Bestimmung der Schwingzeit Drehtisch, Tragplatte und Metall-Hohlzylinder;
- Berechnung Trägheitsmoment Metall-Hohlzylinder (Gl. 15 und Bestimmung des Mittelwertes und der Meßunsicherheit);
- Berechnung Richtmoment (Gl. 12) und Bestimmung der Meßunsicherheit.

3.2 Aufgabe 2

- Abmessungen (Höhe, Durchmesser) und Masse des Vollzylinders bestimmen;
- Messung der Schwingzeit des Objekts auf dem Drehtisch;

- Berechnung des Trägheitsmomentes aus den Schwingzeiten nach Gl. 13 (J_M aus Aufgabe 1);
- Vergleich des berechneten Trägheitsmomentes mit dem aus den geometrischen Abmessungen (Gl. 14);
- Berechnung der Meßunsicherheit (Mittelwert und Vertrauensintervall).

3.3 Aufgabe 3

- Abmessungen (Radius bzw. Durchmesser und Dicke) und Masse der beiden Objekte bestimmen¹;
- Messung der Schwingzeiten von den beiden Objekten auf dem Drehtisch;
- Bestimmung der Trägheitsmomente nach Gl. 9, hierfür kann das Richtmoment aus Aufgabe 1 verwendet werden.
- Vergleich der bestimmten Trägheitsmomente mit denen aus den geometrischen Abmessungen (Gl. 16 für Holzkugel bzw. Gl. 14 für Metallscheibe);
- Abschätzung der Meßunsicherheit

3.4 Aufgabe 4

- Messung der Abstände der exzentrischen Drehachsen zur Schwerpunktsachse bei der Metallscheibe;
- Messung der Schwingzeiten bei Befestigung der Metallscheibe an den einzelnen exzentrischen Drehachsen;
- Berechnung der Trägheitsmomente nach Gl. 9, hierfür kann das Richtmoment aus Aufgabe 1 verwendet werden.
- Erstelle $J_A(a^2)$ -Diagramm mit gemessenen und berechneten Trägheitsmomenten (nach Gl. 4)
- Abschätzung der Meßunsicherheit

4. Meßwerte

4.1 Aufgabe 1

h/mm	d_i/mm	d_A/mm	r_i/mm	r_A/mm	m/kg	J/kgm^2
99,9	100,7	110,0	50,35	55,0	1,1940	$3,319 \cdot 10^{-3}$

Tabelle 1: Daten des Hohlzylinders

i	n	t_1/s	t_2/s	T_1/s	T_2/s	$D/\text{kgm}^2\text{s}^{-2}$
1	10	8,0	19,4	0,80	1,94	$4,195 \cdot 10^{-2}$
2	10	8,0	19,2	0,80	1,92	$4,301 \cdot 10^{-2}$
3	10	8,1	19,2	0,81	1,92	$4,324 \cdot 10^{-2}$
4	10	8,1	19,2	0,81	1,92	$4,324 \cdot 10^{-2}$
5	10	7,9	19,3	0,79	1,93	$4,226 \cdot 10^{-2}$

¹Bei der Metallplatte wird für die Bestimmung der Masse das Befestigungselement abgenommen; bei der Holzkugel wird der Fehler durch das Befestigungselement vernachlässigt, da dieser sehr gering ist.

Tabelle 2: Meßwerte Hohlzylinder

h ... Höhe	i ... laufende Nummer
d_i ... Innendurchmesser	n ... Anzahl der Schwingungen
d_A ... Außendurchmesser	t_1 ... Schwingzeit Drehtisch für n Schwingungen
r_i ... Innenradius	t_2 ... Schwingzeit Drehtisch und Objekt für n Schwingungen
r_A ... Außenradius	T_1 ... Schwingzeit Drehtisch für eine Schwingung
m ... Masse	T_2 ... Schwingzeit Drehtisch und Objekt für eine Schwingung
J ... Trägheitsmoment aus geometrischen Abmessungen	D ... Richtmoment

4.2 Aufgabe 2

Vollzylinder	
h / mm	100,0
d / mm	110,5
r / mm	55,25
m / kg	1,30760
J / kgm ²	$1,995 \cdot 10^{-3}$

h ... Höhe
d ... Durchmesser
r ... Radius
m ... Masse
J ... Trägheitsmoment aus geometrischen Abmessungen

Tabelle 3: Daten Vollzylinder

i	n	t_3 / s	T_3 / s	J_{VZ} / kgm ²
1	10	15,6	1,56	$1,906 \cdot 10^{-3}$
2	10	15,8	1,58	$2,023 \cdot 10^{-3}$
3	10	15,7	1,57	$1,981 \cdot 10^{-3}$
4	10	15,7	1,57	$1,981 \cdot 10^{-3}$
5	10	15,7	1,57	$1,981 \cdot 10^{-3}$

i ... laufende Nummer
n ... Anzahl Schwingungen
t_3 ... Schwingzeit für n Schwingungen
T_3 ... Schwingzeit für eine Schwingung
J_{VZ} ... Trägheitsmoment

Tabelle 4: Meßwerte Vollzylinder

4.3 Aufgabe 3

Kugel	
d / mm	138,8
r / mm	69,4
m / kg	1,004
J / kgm ²	$1,934 \cdot 10^{-3}$

Tabelle 5: Daten der Kugel

i	n	t / s	T / s	J / kgm ²
1	10	12,9	1,29	$1,802 \cdot 10^{-3}$
2	10	12,9	1,29	$1,802 \cdot 10^{-3}$
3	10	13,1	1,31	$1,858 \cdot 10^{-3}$
4	10	13,0	1,30	$1,830 \cdot 10^{-3}$
5	10	13,0	1,30	$1,830 \cdot 10^{-3}$

Tabelle 6: Meßwerte Kugel

Metallscheibe	
d / mm	399,5
h / mm	2,3
r / mm	199,75
m / kg	0,729
J / kgm ²	$1,454 \cdot 10^{-2}$

Tabelle 7: Daten der Metallscheibe

i	n	t / s	T / s	J / kgm ²
1	10	38,8	3,88	$1,630 \cdot 10^{-2}$
2	10	38,7	3,87	$1,621 \cdot 10^{-2}$
3	10	38,8	3,88	$1,630 \cdot 10^{-2}$
4	10	38,8	3,88	$1,630 \cdot 10^{-2}$
5	10	38,8	3,88	$1,630 \cdot 10^{-2}$

Tabelle 8: Meßwerte Metallscheibe

d ... Durchmesser	i ... laufende Nummer
r ... Radius	n ... Anzahl der Schwingungen
h ... Höhe	t ... Schwingzeit für n Schwingungen
m ... Masse	T ... Schwingzeit für eine Schwingung
J ... Trägheitsmoment	

4.4 Aufgabe 4

i	a/ mm	n	t/ s	T/ s	J/ kgm^2	J_B/ kgm^2
1	39,7	10	40,5	4,05	$1,776 \cdot 10^{-2}$	$1,569 \cdot 10^{-2}$
2	79,55	10	45,0	4,50	$2,192 \cdot 10^{-2}$	$1,915 \cdot 10^{-2}$
3	119,4	10	51,5	5,15	$2,838 \cdot 10^{-2}$	$2,493 \cdot 10^{-2}$
4	159,15	10	59,1	5,91	$3,781 \cdot 10^{-2}$	$3,300 \cdot 10^{-2}$
5	20,2	10	39,1	3,91	$1,655 \cdot 10^{-2}$	$1,484 \cdot 10^{-2}$
6	60,25	10	42,5	4,25	$1,955 \cdot 10^{-2}$	$1,719 \cdot 10^{-2}$
7	100,0	10	48,4	4,84	$2,536 \cdot 10^{-2}$	$2,183 \cdot 10^{-2}$
8	139,95	10	57,7	5,77	$3,604 \cdot 10^{-2}$	$2,882 \cdot 10^{-2}$
9	39,7	10	40,6	4,06	$1,785 \cdot 10^{-2}$	$1,569 \cdot 10^{-2}$
10	79,55	10	45,1	4,51	$2,202 \cdot 10^{-2}$	$1,915 \cdot 10^{-2}$
11	119,4	10	51,8	5,18	$2,905 \cdot 10^{-2}$	$2,493 \cdot 10^{-2}$
12	159,15	10	59,2	5,92	$3,794 \cdot 10^{-2}$	$3,300 \cdot 10^{-2}$
13	20,2	10	39,0	3,90	$1,647 \cdot 10^{-2}$	$1,484 \cdot 10^{-2}$
14	60,25	10	42,4	4,24	$1,946 \cdot 10^{-2}$	$1,719 \cdot 10^{-2}$
15	100,0	10	48,4	4,84	$2,536 \cdot 10^{-2}$	$2,183 \cdot 10^{-2}$
16	139,95	10	57,7	5,77	$3,604 \cdot 10^{-2}$	$2,882 \cdot 10^{-2}$

Tabelle 9: Meßwerte Metallscheibe

i ... laufende Nummer	a ... Schwingachsenabstand vom Mittelpunkt	n ... Anzahl der Schwingungen
t ... Schwingzeit für n Schwingungen	T ... Schwingzeit für eine Schwingung	
J ... Trägheitsmoment aus Schwingzeit	J_B ... Trägheitsmoment nach Gl. 4	

5. Auswertung und Fehlerrechnung

5.1 Aufgabe 1

Trägheitsmoment des Hohlzylinders

Aus Gl. 15 folgt für das Trägheitsmoment des Hohlzylinders: $J_{HZ} = 3,319 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$.

Der Maximalfehler des Funktionswertes (da die einzelnen Meßgrößen nicht über Meßreihen bestimmt wurden)

$$\begin{aligned}
 \Delta J_{HZ} &= \pm \left(\left| \frac{\partial J_{HZ}}{\partial m} \Delta m \right| + \left| \frac{\partial J_{HZ}}{\partial R_A} \Delta R_A \right| + \left| \frac{\partial J_{HZ}}{\partial R_i} \Delta R_i \right| \right) \\
 &= \pm \left(\left| \frac{1}{2} (R_A^2 + R_i^2) \Delta m \right| + \left| \frac{1}{2} m (2R_A) \Delta R_A \right| + \left| \frac{1}{2} m (2R_i) \Delta R_i \right| \right) \\
 &= \pm 9,07 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2
 \end{aligned}$$

mit $\Delta m = 10^{-3} \text{ kg}$, $\Delta R_A = \Delta R_i = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m}$.

Richtmoment

Das Richtmoment kann nach Gl. 12 berechnet werden und ist bereits in die Meßwerttabelle (Abschnitt 2) eingetragen, der Mittelwert folgt aus

$$\begin{aligned}\bar{D} &= \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 D_i \\ &= 4,274 \cdot 10^{-2} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}\end{aligned}$$

Da keine größeren Meßreihen durchgeführt wurden, wird hier ebenfalls der Maximalfehler des Funktionswertes bestimmt:

$$\begin{aligned}\Delta D &= \pm \left(\left| \frac{\partial D}{\partial J} \Delta J \right| + \left| \frac{\partial D}{\partial T_2} \Delta T_2 \right| + \left| \frac{\partial D}{\partial T_1} \Delta T_1 \right| \right) \\ &= \pm \left(\left| \frac{4\pi}{\bar{T}_2^2 - \bar{T}_1^2} \Delta J \right| + \left| -\frac{8\pi J \bar{T}_2}{(\bar{T}_2^2 - \bar{T}_1^2)^2} \Delta T_2 \right| + \left| \frac{8\pi J \bar{T}_1}{(\bar{T}_2^2 - \bar{T}_1^2)^2} \Delta T_1 \right| \right) \\ &= \pm 5,212 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}\end{aligned}$$

mit $\Delta J = \pm 9,07 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2$, $\bar{T}_1 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 T_{1,i} = 0,802 \text{ s}$, $\bar{T}_2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 T_{2,i} = 1,926 \text{ s}$, $\Delta T_{1,2} = \pm 0,02 \text{ s}^2$

5.2 Aufgabe 2**Trägheitsmoment des Vollzylinders aus geometrischen Abmessungen**

Nach Gl. 14 folgt für das Trägheitsmoment:

$$J_{VZ} = 1,995 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

Maximalfehler des Funktionswertes:

$$\begin{aligned}\Delta J_{VZ} &= \pm \left(\left| \frac{\partial J_{VZ}}{\partial m} \Delta m \right| + \left| \frac{\partial J_{VZ}}{\partial R} \Delta R \right| \right) \\ &= \pm \left(\left| \frac{1}{2} R^2 \Delta m \right| + |m R \Delta R| \right) \\ &= \pm 5,137 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2\end{aligned}$$

Trägheitsmoment des Vollzylinders aus der Schwingzeitmessung

Die berechneten Trägheitsmomente des Vollzylinders aus der Schwingzeit nach Gl. 13 sind bereits in die Tabelle 4 eingetragen. Als Mittelwert ergibt sich

$$J_{VZ} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 J_{VZ,i} = 1,972 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

²Annahme; Zeitgenauigkeit (Ableseung) $\pm \frac{1}{10} \text{ s}$, da für 10 Schwingungen gemessen wurde, ist der Fehler kleiner, hier wurde angenommen, der max. Fehler ist $2 \cdot \frac{1}{10}$ durch die Anzahl der Schwingungen.

Maximalfehler des Funktionswertes:

$$\begin{aligned}\Delta J_{VZ} &= \pm \left(\left| \frac{\partial J_{VZ}}{\partial J_{HZ}} \Delta J_{HZ} \right| + \left| \frac{\partial J_{VZ}}{\partial T_3} \Delta T_3 \right| + \left| \frac{\partial J_{VZ}}{\partial T_2} \Delta T_2 \right| + \left| \frac{\partial J_{VZ}}{\partial T_1} \Delta T_1 \right| \right) \\ &= \pm \left[\left| \frac{\bar{T}_3^2 - \bar{T}_1^2}{\bar{T}_2^2 - \bar{T}_1^2} \Delta J_{HZ} \right| + \left| 2J_{HZ} \frac{\bar{T}_3}{\bar{T}_2^2 - \bar{T}_1^2} \Delta T_3 \right| + \left| -2J_{HZ} \frac{\bar{T}_3^2 - \bar{T}_1^2}{(\bar{T}_2^2 - \bar{T}_1^2)^2} \bar{T}_2 \Delta T_2 \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| \left(-2J_{HZ} \frac{\bar{T}_1}{\bar{T}_2^2 - \bar{T}_1^2} + 2J_{HZ} \frac{\bar{T}_3^2 - \bar{T}_1^2}{(\bar{T}_2^2 - \bar{T}_1^2) \bar{T}_1} \right) \Delta T_1 \right| \right] \\ &= \pm 1,370 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2\end{aligned}$$

mit $\bar{T}_3 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 T_{3i} = 1,57 \text{ s}$, $\Delta T_3 = \pm 0,02 \text{ s}$.

5.3 Aufgabe 3

5.3.1 Kugel

Trägheitsmoment aus den geometrischen Abmessungen

Nach Gl. 16 folgt:

$$J_K = 1,934 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

Maximalfehler des Funktionswertes:

$$\Delta J_K = \pm \left(\left| \frac{\partial J_K}{\partial m} \Delta m \right| + \left| \frac{\partial J_K}{\partial R} \Delta R \right| \right) = \pm \left(\left| \frac{2}{5} R^2 \Delta m \right| + \left| \frac{4}{5} m R \Delta R \right| \right) = \pm 4,714 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2$$

Trägheitsmoment der Kugel aus der Schwingzeitmessung

Die berechneten Trägheitsmomente der Kugel aus der Schwingzeit nach Gl. 9 sind bereits in die Meßwerttabelle 6 eingetragen. Als Mittelwert ergibt sich

$$J_K = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 J_{K_i} = 1,824 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

Maximalfehler des Funktionswertes:

$$\Delta J_K = \pm \left(\left| \frac{\partial J_K}{\partial D} \Delta D \right| + \left| \frac{\partial J_K}{\partial T} \Delta T \right| \right) = \pm \left(\left| \frac{1}{4} \frac{\bar{T}^2}{\pi^2} \Delta D \right| + \left| \frac{1}{2} \frac{\bar{T}}{\pi^2} \Delta T \right| \right) = \pm 7,845 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$$

mit $\bar{T} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 T_i = 1,298 \text{ s}$.

5.3.2 Metallscheibe

Trägheitsmoment aus den geometrischen Abmessungen

Nach Gl. 14 folgt:

$$J_S = 1,454 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

Maximalfehler des Funktionswertes:

$$\Delta J_{VZ} = \pm \left(\left| \frac{\partial J_{HZ}}{\partial m} \Delta m \right| + \left| \frac{\partial J_{HZ}}{\partial R} \Delta R \right| \right) = \pm \left(\left| \frac{1}{2} R^2 \Delta m \right| + |m R \Delta R| \right) = \pm 2,723 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$$

Trägheitsmoment aus der Schwingzeitmessung

Die berechneten Trägheitsmomente der Metallscheibe aus der Schwingzeit nach Gl. 9 sind bereits in die Meßwerttabelle 8 eingetragen. Als Mittelwert ergibt sich

$$J_S = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 J_{S_i} = 1,454 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

Maximalfehler des Funktionswertes:

$$\Delta J_S = \pm \left(\left| \frac{\partial J_K}{\partial D} \Delta D \right| + \left| \frac{\partial J_K}{\partial T} \Delta T \right| \right) = \pm \left(\left| \frac{1}{4} \frac{\bar{T}^2}{\pi^2} \Delta D \right| + \left| \frac{1}{2} \bar{D} \frac{\bar{T}}{\pi^2} \Delta T \right| \right) = \pm 7,845 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$$

mit $\bar{T} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 T_i = 1,3,878 \text{ s}$.

5.4 Aufgabe 4

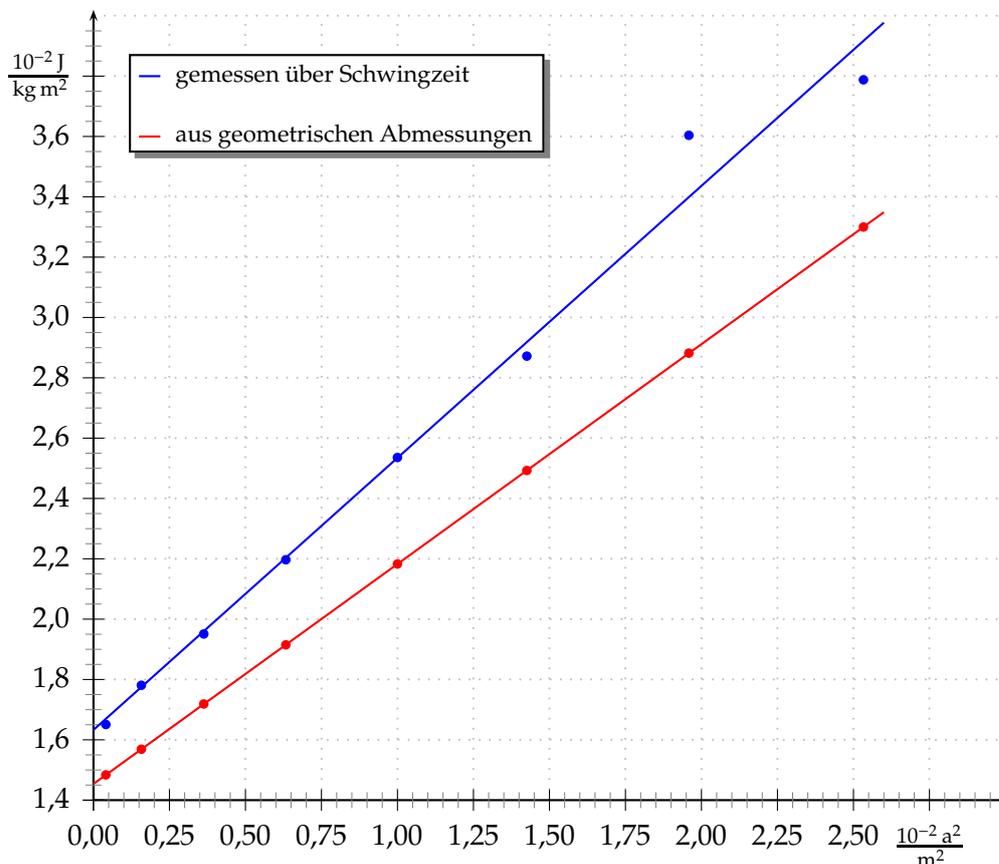


Abbildung 1: $J(a^2)$ -Diagramm

Werte aus der linearen Gradientenregression $J = Cx + B$

- für gemessene Werte über Schwingzeit:

$$B = 1,633 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

$$C = 90,17 \cdot 10^{-2} \text{ kg}$$

- für berechnete Werte aus geometrischen Abmessungen:

$$B = 1,454 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

$$C = 72,88 \cdot 10^{-2} \text{ kg}$$

6. Bewertung und Vergleich der Daten

Für das Trägheitsmoment des Hohlzylinders wurde aus den geometrischen Abmessungen ein Wert von $J_{HZ} = 3,319 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \pm 9 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2$ oder $J_{HZ} = 3,319 \cdot 10^{-3} (1 \pm 0,27\%) \text{ kg m}^2$ bestimmt. Das Richtmoment der Feder beträgt $D = (4,27 \pm 0,052) \cdot 10^{-2} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$ bzw. $D = 4,27 \cdot 10^{-2} (1 \pm 1,2\%) \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$. Beide Werte sind relativ genau, so daß sie in den weiteren Versuchen verwendet werden können.

Das aus den geometrischen Abmessungen bestimmte Trägheitsmoment für den Vollzylinder beträgt $J_{VZ} = (1,995 \pm 0,005) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$ ($J_{VZ} = 1,995 \cdot 10^{-3} (1 \pm 0,25\%) \text{ kg m}^2$) und aus der Schwingzeit $J_{VZ} = (1,97 \pm 0,14) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$ ($J_{VZ} = 1,97 \cdot 10^{-3} (1 \pm 7,1\%) \text{ kg m}^2$). Der aus der Schwingzeit bestimmte Wert liegt mit seiner Meßunsicherheit im Bereich des theoretischen.

Für die Kugel wurde ein theoretisches Trägheitsmoment zu $J_K = (1,934 \pm 0,005) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$ ($J_K = 1,934 \cdot 10^{-3} (1 \pm 0,26\%) \text{ kg m}^2$) und aus der Schwingzeit $J_K = (1,82 \pm 0,05) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$ ($J_K = 1,82 \cdot 10^{-3} (1 \pm 4,4\%) \text{ kg m}^2$) bestimmt. Die größere Abweichung könnte u. a. durch die Vernachlässigung der Masse des Befestigungselementes hervorgerufen werden. Ebenfalls konnte der Kugeldurchmesser nicht selbst bestimmt werden – hier wurde der aufgedruckte Wert verwendet.

Bei der Metallplatte gibt es die größte Diskrepanz zwischen gemessenen und theoretischen Werten:

- theoretisch: $V_S = (1,45 \pm 0,03) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$ ($V_S = 1,45 \cdot 10^{-3} (1 \pm 2,1\%) \text{ kg m}^2$)
- aus der Schwingzeit: $V_S = (1,6 \pm 0,4) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$ ($V_S = 1,6 \cdot 10^{-3} (1 \pm 23\%) \text{ kg m}^2$)

Ursachen hierfür könnten u. a. an der Befestigung liegen (diese wurde nicht mit berücksichtigt) als auch an Querschwingungen der Metallplatte, die die Messung stören. Da diese Messung bereits größere Fehler verursachte, ist nicht verwunderlich, daß auch bei Aufgabe 4 größere Abweichungen zwischen theoretisch und experimentell auftreten. Dabei ist jedoch das Trägheitsmoment im Schwerpunkt, ermittelt über die lineare Regression, identisch mit dem aus Aufgabe 3.

Ursachen für die größere Diskrepanz zwischen theoretischen und gemessenen Werten liegen sicherlich in der Zeitmessung, da hier bereits kleine Differenzen größere Änderungen hervorrufen. Vor allem bei großem a war die Zeitbestimmung nicht ganz einfach – den Fixpunkt für die Zeitmessung war weniger deutlich erkennbar.

Da die Waage nicht mehr ganz auf den Nullpunkt einstellbar war und durch mangelnde Skaleneinteilung in dem Bereich eine entsprechende Umrechnung nicht möglich war, wurde (nach Anmerkung des Betreuers) die Meßunsicherheit auf $\Delta m = \pm 1 \text{ g}$ gesetzt (und nicht auf $\Delta m = \pm 0,1 \text{ g}$).

Generell wurden bei allen Fehlerberechnungen der Maximalwert des Funktionswertes nach dem Gauß'schen Fehlerfortpflanzungsverfahren ermittelt, da die Messungen nicht häufig durchgeführt wurden, so daß das allg. Gauß'sche Verfahren nicht gerechtfertigt wäre. Die Abweichungsbestimmung vom Mittelwert für $n = 5$ ist nicht sehr vertrauenswürdig. Im Allgemeinen könnten die Werte sicherer werden, wenn die Messungen häufiger wiederholt werden würden, so daß Mittelwert und Standardabweichung ermittelt werden könnten.

7. verwendete Geräte

- Drehtisch
- Libelle
- Waage $\Delta m = \pm 1 \text{ g}$ (siehe Bemerkung oben)

- Schieblehre mit Nonius, $\Delta x = \pm 0,1 \text{ mm}$
- Maßstab, $\Delta x = \pm 1 \text{ mm}$
- Analoguhr Junghans, $\Delta t = \frac{1}{10} \text{ s}$
- Probekörper und Befestigungsmaterial

Literatur

- [Dem06] DEMTRÖDER, Wolfgang: *Experimentalphysik 1*. Bd. 1: *Mechanik und Wärme*. 4. Auflage. Springer, Berlin – Heidelberg – New York, 2006. – ISBN 3–540–26034–x
- [Kuc94] KUCHLING, Horst: *Taschenbuch der Physik*. 14. Auflage. Fachbuchverlag Leipzig-Köln, 1994. – ISBN 3–343–00858–3
- [Mey06] MEYER, Dirk: *Physikalisches Praktikum für Studierende der Physik – Versuchsanleitungen*. 4. Auflage. 2006
- [Tip98] TIPLER, Paul A. ; GERLICH, Dieter (Hrsg.) ; JERKE, Götz (Hrsg.): *Physik*. 2. korrigierter Nachdruck der 1. deutschen Auflage von 1994. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg - Berlin, 1998. – ISBN 3–86025–122–8
- [Wal94] WALCHER, Wilhelm: *Praktikum der Physik*. 7. Auflage. B.G. Teubner Stuttgart, 1994

Liste der Versionen

Version	Datum	Bearbeiter	Bemerkung
0.8	06.03.2007	Krä	Versuchsvorbereitung
0.9	07.03.2007	Krä	Versuchsdurchführung
1.0	13.03.2007	Krä	Versuchsauswertung