

# Bestimmung der Brennweite dünner Linsen mit Hilfe der Linsenformel

## Versuchsprotokoll

Tobias Krähling  
eMail: <Tobias.Kraehling@SemiByte.de>  
Homepage: <www.SemiByte.de>

20.04.2007  
Version: 1.2

## Inhaltsverzeichnis

1. Aufgabenstellung .....	2
2. Grundlagen .....	2
3. Geräteliste .....	2
4. Versuchsaufbau .....	2
5. Arbeitsanweisung .....	3
6. Meßprotokoll .....	3
7. Kennlinie .....	4
8. Berechnung der Ergebnisse .....	5
8.1 mathematische Berechnung .....	5
8.1.1 Gegenstandsweite .....	5
8.1.2 Bildweite .....	5
8.1.3 Brennweite .....	6
8.1.4 Brechwert .....	6
8.1.5 Berechnung der Mittelwerte für $f$ und $D$ .....	6
8.2 graphische Ermittlung .....	7
8.2.1 Brechwert .....	7
8.2.2 Brennweite .....	7
9. Fehlerabschätzung .....	7
9.1 mathematische Berechnung .....	7
9.2 graphische Ermittlung .....	8
9.2.1 Brechwert .....	8
9.2.2 Brennweite .....	8
10. Endergebnis .....	8

## 1. Aufgabenstellung

Bestimmung der Brennweite dünner Linsen mit Hilfe der Linsenformel.

## 2. Grundlagen

Das optische Verhalten einer Linse oder eines Linsensystems wird bestimmt durch die Brennweite und die Lage der Hauptebenen. Bei dünnen Linsen fallen die beiden Hauptebenen praktisch zusammen.

Zwischen der Gegenstandsweite, dem Abstand Gegenstand – Hauptebene, der Bildweite, dem Abstand Bild – Hauptebene und der Brennweite, dem Abstand Brennpunkt – Hauptebene, besteht die Linsengleichung:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$

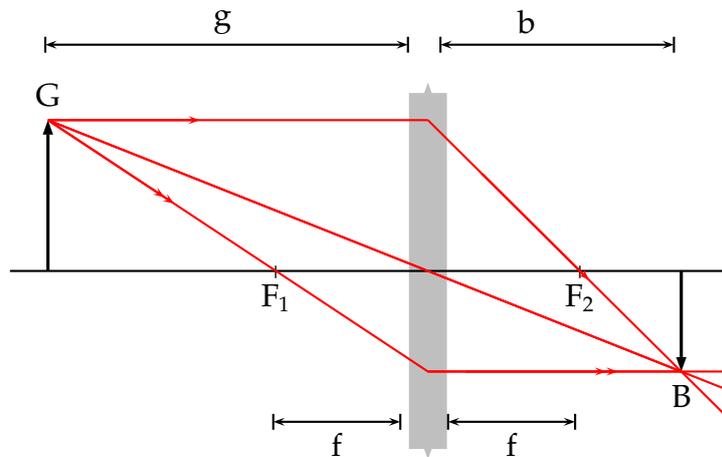
Durch Messung von Gegenstands- und Bildweite kann mit Hilfe der Linsenformel die Brennweite ermittelt werden. Den Kehrwert der Brennweite  $f$  bezeichnet man als Brechwert  $D$  der Linse:

$$D = \frac{1}{f} \quad \text{mit der Einheit } \textit{Dioptrie} \textit{ (dpt)} = \textit{m}^{-1}$$

## 3. Geräteliste

- 1 Dia als Gegenstand
- 1 optische Bank
- 1 Lampe
- 1 Mattscheibe
- untersuchter Gegenstand
  - 1 Linsensystem aus 2 Linsen (Sammellinse)

## 4. Versuchsaufbau



## 5. Arbeitsanweisung

- Wir stellen die zu untersuchende Linse zwischen den Gegenstand und Schirm auf die optische Bank, justieren die einzelnen Elemente auf eine Ebene und verschieben die Linse so lange, bis auf dem Schirm ein scharfes Bild des Gegenstandes erscheint.
- Die Schärfe des Bildes erkennt man an folgendem Kriterium: Befindet sich der Schirm zu weit von der Linse entfernt, dann hat das aufgefangene Bild einen bläulichen Saum, ohne dabei merklich unscharf zu sein; ist der Schirm zu nahe an der Linse, so hat das Bild einen rötlichen Saum. Zwischen beiden Stellungen liegt die wahre Bildweite.
- Da es sich hier um ein Linsensystem handelt und die Linse sich nicht mittig in der Halterung befindet, muß die Linse um  $180^\circ$  gedreht werden (horizontal) und ein zweites Mal  $g$  und  $b$  bestimmt werden.
- Die Messungen werden mehrmals bei verschiedenen Abständen durchgeführt und in eine Tabelle eingetragen, eine Fehlerrechnung ist durchzuführen.
- Zur Prüfung der Genauigkeit der Messung und zur graphischen Ermittlung von  $f$  und  $D$  ist eine Kennlinie des Linsensystems in der Form  $y = \frac{1}{g}$ ;  $x = \frac{1}{b}$ ;  $f = \frac{g \cdot b}{g+b}$ ;  $\Rightarrow D = x + y$ ; hierfür ist eine Fehlerrechnung durchzuführen.

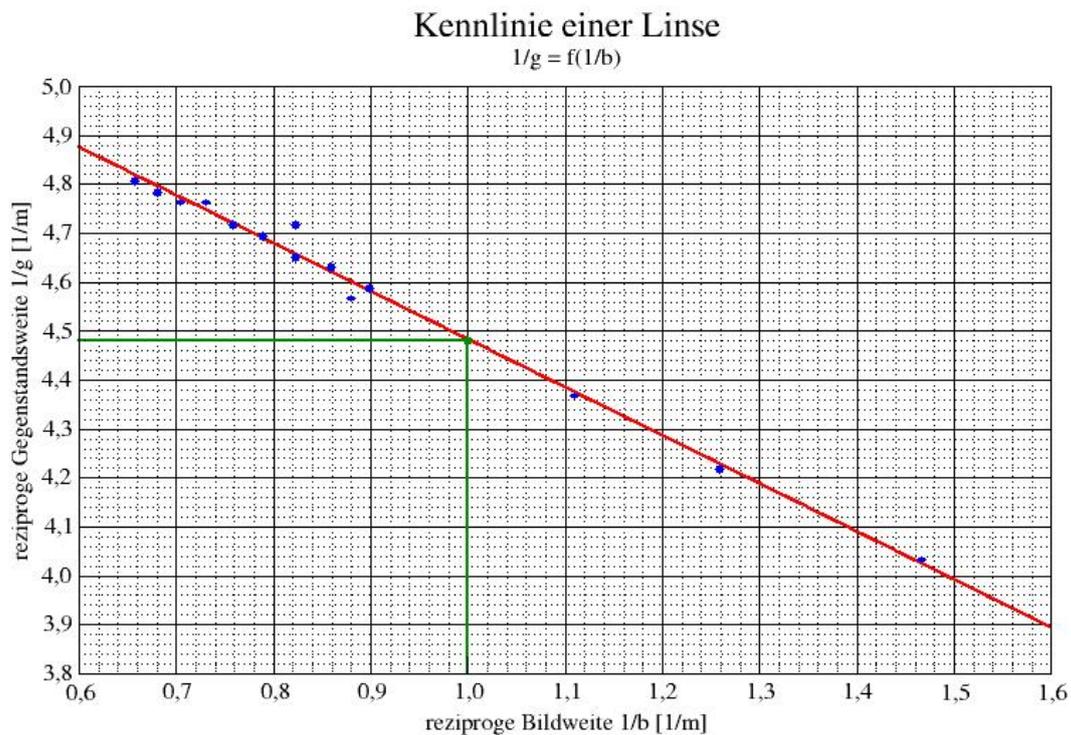
## 6. Meßprotokoll

i	$r_1$ [ mm]	$r_2$ [ mm]	$r_3$ [ mm]	$r_4$ [ mm]	$g$ [ mm]	$b$ [ mm]	$f$ [ mm]	$D$ [ dpt]
1	201	1228	223	1203	212	1216	181	5,54
2	206	1124	229	1101	218	1113	182	5,50
3	226	1204	203	1227	215	1216	183	5,48
4	209	1280	229	995	219	1138	184	5,45
5	240	890	217	913	229	902	183	5,49
6	224	806	249	781	237	794	183	5,49
7	259	671	237	693	248	682	182	5,50
8	201	1329	222	1308	212	1319	183	5,49
9	221	1409	198	1432	210	1421	183	5,48
10	196	1534	219	1511	208	1523	183	5,48
11	228	1152	204	1176	216	1164	182	5,49
12	200	1280	225	1255	213	1268	182	5,49
13	222	1358	198	1382	210	1370	182	5,49
14	206	1124	230	1100	218	1112	182	5,49
15	221	1459	197	1483	209	1471	183	5,46

### Legende

- $i$ : laufende Nummer der Messung
- $r_1$ : 1. Gegenstandsweite in mm
- $r_2$ : 1. Bildweite in mm
- $r_3$ : 2. Gegenstandsweite in mm
- $r_4$ : 2. Bildweite in mm
- $g$ : mittlere Gegenstandsweite aus  $r_1$  und  $r_3$  in mm
- $b$ : mittlere Bildweite aus  $r_2$  und  $r_4$  in mm
- $f$ : Brennweite des Linsensystems in mm
- $D$ : Brechwert des Linsensystems in dpt

## 7. Kennlinie



## 8. Berechnung der Ergebnisse

### 8.1 mathematische Berechnung

#### 8.1.1 Gegenstandsweite

Die mittlere Gegenstandsweite ergibt sich aus dem Mittelwert der beiden Gegenstandsweiten.

$$g_i = \frac{1}{2} (r_{1,i} + r_{3,i})$$

Beispielrechnung für  $i_1$ :

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{1}{2} (r_{1,1} + r_{3,1}) \\ &= \frac{1}{2} (201 \text{ mm} + 223 \text{ mm}) \\ &= 212 \text{ mm} \end{aligned}$$

#### 8.1.2 Bildweite

Die mittlere Bildweite ergibt sich aus dem Mittelwert der beiden Bildweiten.

$$b_i = \frac{1}{2} (r_{2,i} + r_{4,i})$$

Beispielrechnung für  $i_1$ :

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{2} (r_{2,1} + r_{4,1}) \\ &= \frac{1}{2} (1228 \text{ mm} + 1203 \text{ mm}) \\ &= \mathbf{1216 \text{ mm}} \end{aligned}$$

### 8.1.3 Brennweite

Die Brennweite wird über die Linsengleichung berechnet.

$$f_i = \left( \frac{1}{g_i} + \frac{1}{b_i} \right)^{-1}$$

Beispielrechnung für  $i_1$ :

$$\begin{aligned} f_1 &= \left( \frac{1}{g_1} + \frac{1}{b_1} \right)^{-1} \\ &= \left( \frac{1}{212 \text{ mm}} + \frac{1}{1216 \text{ mm}} \right)^{-1} \\ &= \mathbf{181 \text{ mm}} \end{aligned}$$

### 8.1.4 Brechwert

Der Brechwert ist der reziproke Wert der Brennweite.

$$\begin{aligned} D_i &= \frac{1}{f_i} \\ &= \frac{1}{g_i} + \frac{1}{b_i} \\ &= 2 \left( \frac{1}{r_{1,i} + r_{3,i}} + \frac{1}{r_{2,i} + r_{4,i}} \right) \end{aligned}$$

Beispielrechnung für  $i_1$ :

$$\begin{aligned} D_1 &= 2 \left( \frac{1}{r_{1,1} + r_{3,1}} + \frac{1}{r_{2,1} + r_{4,1}} \right) \\ &= 2 \left( \frac{1}{201 \text{ mm} + 223 \text{ mm}} + \frac{1}{1228 \text{ mm} + 1203 \text{ mm}} \right) \\ &= \mathbf{5,54 \text{ dpt}} \end{aligned}$$

### 8.1.5 Berechnung der Mittelwerte für $f$ und $D$

- Brennweite:

$$\bar{f} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} f_i = \mathbf{183 \text{ mm}}$$

- Brechwert:

$$\bar{D} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} D_i = \mathbf{5,49 \text{ dpt}}$$

## 8.2 graphische Ermittlung

$$\Delta b^{-1} = 1,00 \text{ m}^{-1}$$

$$\Delta g^{-1} = 4,48 \text{ m}^{-1}$$

### 8.2.1 Brechwert

$$\begin{aligned} D &= \Delta b^{-1} + \Delta g^{-1} \\ &= 1,00 \text{ m}^{-1} + 4,48 \text{ m}^{-1} \\ &= 5,48 \text{ dpt} \end{aligned}$$

### 8.2.2 Brennweite

$$\begin{aligned} f &= \frac{g \cdot b}{g + b} \\ &= \frac{[\Delta g^{-1}]^{-1} \cdot [\Delta b^{-1}]^{-1}}{[\Delta g^{-1}]^{-1} + [\Delta b^{-1}]^{-1}} \\ &= \frac{[4,48 \text{ m}^{-1}]^{-1} \cdot [1,00 \text{ m}^{-1}]^{-1}}{[4,48 \text{ m}^{-1}]^{-1} + [1,00 \text{ m}^{-1}]^{-1}} \\ &= 0,182 \text{ m} \end{aligned}$$

## 9. Fehlerabschätzung

### 9.1 mathematische Berechnung

Die Abweichung der einzelnen Meßwerte vom Mittelwert beträgt:

$$\delta_i = x_i - \bar{x}$$

und für die Standardabweichung

$$s = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^n \delta_i^2 (n-1)^{-1}} = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 (n-1)^{-1}}$$

Die »statistische Sicherheit« (Wahrscheinlichkeit)  $S\%$  wird mit  $S\% = 99\%$  gewählt, so daß zur Standardabweichung noch ein Faktor (für  $S\% = 99\% \Rightarrow k = 2,58$ ) multipliziert werden muß.

$$\sigma = \pm s \cdot k$$

Die relative Standardabweichung beträgt somit

$$V = \pm \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

**Berechnete Werte für Brennweite und Brechwert**

	<b>S</b>	$\sigma$	<b>V</b>
<b>Brennweite</b>	$\pm 0,743$	$\pm 1,917$	$\pm 1\%$
<b>Brechwert</b>	$\pm 1,97 \cdot 10^{-2}$	$\pm 0,05083$	$\pm 1\%$

**9.2 graphische Ermittlung**

$$\Delta b^{-1} = 1,00 \text{ m}^{-1}$$

$$\Delta g^{-1} = 4,48 \text{ m}^{-1}$$

$$\Delta \Delta b^{-1} = 1 \text{ mm, das entspricht } 0,01 \text{ m}^{-1}$$

$$\Delta \Delta g^{-1} = 1 \text{ mm, das entspricht } 0,02 \text{ m}^{-2}$$

**9.2.1 Brechwert**

$$D_{max} = \Delta b^{-1} + \Delta \Delta b^{-1} + \Delta g^{-1} + \Delta \Delta g^{-1}$$

$$D_{max} = 1,00 \text{ m}^{-1} + 0,01 \text{ m}^{-1} + 4,48 \text{ m}^{-1} + 0,02 \text{ m}^{-1}$$

$$D_{max} = 5,51 \text{ dpt}$$

$$D_{min} = \Delta b^{-1} - \Delta \Delta b^{-1} + \Delta g^{-1} - \Delta \Delta g^{-1}$$

$$D_{min} = 1,00 \text{ m}^{-1} - 0,01 \text{ m}^{-1} + 4,48 \text{ m}^{-1} - 0,02 \text{ m}^{-1}$$

$$D_{min} = 5,45 \text{ dpt}$$

$$\Delta D = \pm \frac{1}{2} (D_{max} - D_{min})$$

$$\Delta D = \pm 0,03 \text{ dpt}$$

$$\frac{\Delta D}{D} = \pm 0,5\%$$

**9.2.2 Brennweite**

$$f_{max} = \frac{[\Delta g^{-1} - \Delta \Delta g^{-1}]^{-1} \cdot [\Delta b^{-1} - \Delta \Delta b^{-1}]^{-1}}{[\Delta g^{-1} + \Delta \Delta g^{-1}]^{-1} [\Delta b^{-1} + \Delta \Delta b^{-1}]^{-1}}$$

$$= 0,187 \text{ m}$$

$$f_{min} = \frac{[\Delta g^{-1} + \Delta \Delta g^{-1}]^{-1} \cdot [\Delta b^{-1} + \Delta \Delta b^{-1}]^{-1}}{[\Delta g^{-1} - \Delta \Delta g^{-1}]^{-1} [\Delta b^{-1} - \Delta \Delta b^{-1}]^{-1}}$$

$$= 0,178 \text{ m}$$

$$\Delta f = \pm \frac{1}{2} (f_{max} - f_{min})$$

$$= \pm 0,005 \text{ m}$$

$$\frac{\Delta f}{f} = \pm 2\%$$

## 10. Endergebnis

Mit einer »statistischen Sicherheit« von  $S\% = 99\%$  ( $k = 2,58$ ) beträgt die Brennweite des Linsensystems beim mathematischen Lösungsverfahren  $f = 183 \text{ mm}(1 + 1\%)$  und hat einen Brechwert von  $D = 5,49 \text{ dpt}(1 + 1\%)$ .

Beim graphischen Lösungsverfahren ergab sich eine Brennweite von  $f = 182 \text{ mm}(1 + 2\%)$  und ein Brechwert von  $D = 5,48 \text{ dpt}(1 + 0,5\%)$ .

### Liste der Versionen

Version	Datum	Bearbeiter	Bemerkung
0.9	19.09.1996	Bri	Versuchsdurchführung
1.0	22.09.1996	Bri	Protokollerstellung
1.1	05.04.2006	Bri	Erster EDV-Satz des Protokolls
1.2	20.04.2007	Krä	Satz des Protokolls in $\text{\LaTeX}$