D12 – Statistik- und Stichprobenproblem
Physikpraktikum

Tobias Krähling
eMail: <Tobias.Kraehling@SemiByte.de>
Homepage: <www.SemiByte.de>

04.11.2007
Version: 1.1

Stichworte:	Statistik, Stichprobe, Verteilungsfunktionen, Normalverteilung, Poissonverteilung, Binominalverteilung, χ^2-Test, Lageparameter, Standardabweichung, Varianz, Fehlerfortpflanzung, Ausgleichskurve
Literatur:	[BWB+04], [BSMM05], [Han06], [KS56], [Kuc94], [Mey06]

1. Aufgabenstellung

1. Stichprobe vom Umfang $n = 200$ erheben.
2. Histogramm für die Verteilung der erhobenen Daten zeichnen.
3. Für die Daten sind zu berechnen:
   a) der arithmetische Mittelwert,
   b) die Varianz,
   c) die Standardabweichung des Einzelwertes und
   d) die Standardabweichung des Mittelwertes.
4. Prüfung, ob es sich bei der Verteilung um eine Binomial-, eine Poisson- und/oder eine Normalverteilung handelt sowie die Haltbarkeitsprüfung dieser Hypothese mittels dem χ^2-Test.
   a) Schätzung des fehlenden Parameters für die jeweilige Verteilung.
   b) Minimierung von χ^2 mittels Parametervariation.
   c) Verteilungen mit den Parametern für minimales χ^2 zusammen mit der empirischen Verteilung graphisch darstellen.
   d) Formulierung von Aussagen für die drei Verteilungen zur Haltbarkeit der Hypothese auf den Konfidenzniveaus a) $1 - \alpha := 95\%$ sowie b) $1 - \alpha := 99\%$

2. Grundlagen

In der statistischen Betrachung wird zwischen zwei Betrachtungsmengen unterschieden, wobei die hierfür verwendeten Begriffe zunächst geklärt werden. Unter der *Grundgesamtheit* versteht man die vollständige Menge der betrachteten Objekte – diese kann sowohl endlich (z. B. die Menge aller produzierten Objekte in einem Produktionszyklus) wie auch unendlich (z. B. die Menge aller möglichen Meßwerte, wenn die Messung unendlich oft wiederholt wird) sein. Häufig ist es ökonomisch nicht sinnvoll, die Grundgesamtheit für die statistische Auswertung zu betrachten – wenn überhaupt möglich – und es wird eine *Stichprobe* verwendet, die aus einer „zufällig ausgewählten" endlichen Menge der Grundgesamtheit besteht. Dabei muß der Stichprobenumfang so groß gewählt werden und das Selektionsverfahren derart gewählt werden, das ein Rückschluß auf die Grundgesamtheit möglich ist – dies bedeutet, die

Stichprobe sollte die Eigenschaften der Grundgesamtheit wiederspiegeln und subjektive Entnahmeentscheidungen des Betrachters vermieden werden (beispielsweise wird jedes zehnte Objekt einer Produktionslinie für die Stichprobe verwendet und nicht diejenigen Objekte, die einem Beobachter als besonders „gut“ bzw. „schlecht“ erscheinen). Ggf. kann es für die weitere Analyse sinnvoll sein, eine Aggregation der Elemente zu Elementklassen durchzuführen – im folgenden kann jeweils Element durch Elementklasse ersetzt werden.

Bei der Betrachtung einer festgelegten Anzahl an Merkmalen einer Objektmenge X ist das zu betrachtende Ergebnis die *Merkmalsausprägung*. Die Merkmale lassen sich dabei in die Gruppen *quantitatives Merkmal* (ausgezähltes oder gemessenes Merkmal) sowie *qualitatives Merkmal* (bezüglich der Art erfaßt) unterscheiden. Zusätzlich können *quantitativen Merkmale* als *diskretes* oder *kontinuierliches* Merkmal auftreten. Sei $n = |X|$ die Anzahl der betrachteten Objekte und $\mathrm{val}\,(x_i(m))_{x_i \in X, m \in M}$ der Wert des Merkmals m für das Objekt x_i. Die *absolute Häufigkeit* $H_n(x^*)$ und *relative Häufigkeit* $h_n(x)$ des Merkmalswertes x^* beträgt dann

$$H_n(x^*) = \left|\left\{i \;\middle|\; x^* = \mathrm{val}\,(x_i(m))\right\}\right| \qquad (1a) \qquad\qquad h_n(x^*) = \frac{1}{n} H_n(x^*) \qquad (1b)$$

Die *Wahrscheinlichkeit* P gibt nun die relative Häufigkeit an, ein Merkmalswert x^* bei zukünftigen Betrachtungen eines Objektes x_i zu erhalten (d. h. die Objektmenge wird gegen eine unendliche Anzahl an Elementen vergrößert).

Man betrachtet ein Zufallsexperiment mit einer endlichen Ergebnismenge Ω ($n = |\Omega| < \infty$), wobei jedes Ergebnis $e \in \Omega$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten kann (Gleichverteilung, Laplace-Annahme). Dann gilt für die Wahrscheinlichkeit $P(e)$ des Auftretens von Ereignis e:

$$P(e) = \frac{1}{n} = \frac{1}{|\Omega|} \qquad (2)$$

Die Häufigkeitsverteilung von Merkmalsausprägungen können durch geeignete *Lageparameter* und *Streuungsparameter* beschrieben werden.

2.1 Lageparameter

Je nach Problemstellung können verschiedene Lageparameter sinnvoll die Häufigkeitsverteilung beschreiben. Ggf. wird noch eine geeignet definierte Wichtungsabbildung $w : I \to \mathbb{R}^{>0}$ ($I \ldots$ Indexmenge) verwendet ($w_g := \sum_{i=1}^{n} w_i$)

Arithmetisches Mittel $\bar{x}$: Bestimmung bei einer Stichprobe aus n Elementen x_i über

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (3a) \qquad \text{bzw.} \qquad \bar{x}_w := \left(\sum_{i=1}^{n} x_i w_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} w_i\right)^{-1} \qquad (3b)$$

Median $\tilde{x}$: Bei einer topologisch sortierten Liste der Elemente ist der Median $\tilde{x}$ derjenige Elementwert, der die Liste halbiert. Seien x_i die Elemente der sortierten Liste mit $x_i \leq x_{i+1}$, so gilt

$$\tilde{x} := \begin{cases} x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} & n \bmod 2 = 1 \\ \frac{1}{2}\left(x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}\right) & n \bmod 2 = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Modalwert: Der Modalwert $\hat{x}$ sind diejenigen Elementwerte, deren Häufigkeit maximal ist (nicht eindeutig).

$$\hat{x} := \arg\max\{h(i) | i \in \Omega\} \qquad (5)$$

geometrisches Mittel $\check{x}$: nur definiert, wenn gilt: $\forall i \,:\, x_i > 0$

$$\check{x} := \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \quad \Leftrightarrow \quad \log \check{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log x_i \qquad (6a) \qquad \text{bzw.} \qquad \check{x}_w := \sqrt[w_g]{\prod_{i=1}^{n} x_i^{w_i}} \qquad (6b)$$

harmonisches Mittel $\check{x}$:

$$\check{x} := \begin{cases} 0 & , \exists x_i = 0 \\ \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} & \text{sonst} \end{cases} \quad (7a) \qquad \text{bzw.} \qquad \check{x}_w := \begin{cases} 0 & , \exists x_i = 0 \\ \frac{w_g}{\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{x_i}} & \text{sonst} \end{cases} \quad (7b)$$

Median ist gegenüber Ausreißern robust, das arithmetische Mittel ist ausreißerempfindlicher als das geometrische Mittel – ist die Verteilung symmetrisch, so werden Median, arithmetisches und geometrisches Mittel etwa den selben Wert aufweisen. Das arithmetische Mittel nimmt, neben seiner großen Ausreißerempfindlichkeit, eine weitere Sonderstellung ein, da dieses die Bedingung $\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = 0$ erfüllt – dies wird bei der Methode der kleinsten Quadrate ausgenutzt.

2.2 Standardabweichung

Als Streumaß bei Normalverteilungen wird häufig die Standardabweichung (mittlere quadratische Abweichung der Einzelelemente) s bzw. die Varianz s^2 verwendet. Zwar führt eine vergrößerte Stichprobe zu einem verbesserten Mittelwert, die Standardabweichung wird sich jedoch nicht spürbar verkleinern. Beide Werte sind wie folgt definiert:

$$s := \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \quad (8a) \qquad s^2 = (s)^2 \quad (8b)$$

Ein Maß für die „Zuverlässigkeit“ des Mittelwertes $\bar{x}$ ist die Standardabweichung des Mittelwertes (mittlerer Fehler des Mittelwertes). Er ist definiert als

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \quad (9)$$

Eine Vergrößerung der Stichprobe führt zu einer Verkleinerung der Standardabweichung des Mittelwertes.

Die wahre Standardabweichung σ bzw. der Vertrauensbereich des Mittelwertes gibt an, in welchen Grenzen der wahre Wert mit einer bestimmten statistischen Sicherheit S liegt. Hierfür wird ein Parameter $k(S)$ geeignet definiert (in Abhängigkeit der Verteilungsfunktion) und es gilt:

$$\sigma(s,S) := \pm k(S) \cdot s \quad (10a) \qquad \sigma_{\bar{x}}(s_{\bar{x}},S) := \pm k(S) \cdot s_{\bar{x}} \quad (10b)$$

Ist nur eine kleine Stichprobe vorhanden, so muß noch, um die Sicherheit S garantieren zu können, die Stichprobengröße mit berücksichtigt werden. Statt des Parameters $k(S)$ wird ein Parameter $t(S,n)$ verwendet:

$$\sigma(s,S,n) := \pm t(S,n) \cdot s \quad (11a) \qquad \sigma_{\bar{x}}(s_{\bar{x}},S,n) := \pm t(S,n) \cdot s_{\bar{x}} \quad (11b)$$

Entsprechende Werte für $k(S)$ und $t(S,n)$ sind z. B. in [KS56] zu finden.

2.3 Fehlerfortpflanzung

Setzt sich ein Ergebnis aus mehreren, mit Unsicherheiten behafteten Größen $(x_1,x_2,\dots)$ zusammen, so ist das Ergebnis (Funktionswert $F(x_1,x_2,\dots)$) selbst mit Unsicherheiten behaftet – die Unsicherheiten der Einzelgrößen setzen sich fort. Sind die Unsicherheiten klein, so kann eine Taylor-Entwicklung nach den Fehlern durchgeführt werden, in der die Glieder 2. Ordnung vernachlässigt werden – man spricht von der Fehlerfortpflanzung. Sei $\sigma(\bar{x}_i)$ der

Vertrauensbereich des Mittelwertes der Einzelgröße i, dann gilt für die mittlere Unsicherheit der funktionalen Größe $\Delta\bar{F}$:

$$\Delta\bar{F} = \pm\sqrt{\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\sigma(\bar{x}_i)\right)^2} \tag{12a}$$

Ist F eine algebraische Summe der Einzelgrößen (mit Koeffizienten a_i), so vereinfacht sich dies zu

$$F = \sum_{i=1}^{k} \pm a_i x_i \Rightarrow \Delta\bar{F} = \pm\sqrt{\sum_{i=1}^{k}(a_i\sigma(\bar{x}_i))^2} \tag{12b}$$

und bei Potenzprodukten (mit Potenzenen a_i) zu

$$F = \prod_{i=1}^{k} x_i^{\pm a_i} \Rightarrow \Delta\bar{F} = \pm F\sqrt{\sum_{i=1}^{k}\left(a_i\frac{\sigma(\bar{x}_i)}{\bar{x}_i}\right)^2} \tag{12c}$$

In den Gl. (12a), (12b) und (12c) wird davon ausgegangen, daß sich die Unsicherheiten der Einzelgrößen teilweise kompensieren. Diese Annahme ist jedoch nicht haltbar, wenn für die Einzelgrößen der Vertrauensbereich des Mittelwertes nicht bestimmt werden kann oder dieser nicht sinnvoll bestimmbar ist – hierfür ist es günstiger, den *Maximalfehler* des Funktionswertes zu bestimmen. Seien Δx_i die sinnvoll geschätzen Fehler des Einzelwertes (Vertrauensbereich, geschätzer Fehler aus Ablesemöglichkeit, Fehlergrenze des Gerätes,. . .), so ist der Maximalfehler ΔF

$$\Delta F = \pm\sum_{i=1}^{k}\left|\frac{\partial F}{\partial x_i}\Delta x_i\right| \tag{13}$$

2.4 Ausgleichskurven

Wird eine Größe y in Abhängigkeit einer anderen Größe x bestimmt, so kann versucht werden, eine Funktion $F(x)$ zu finden, die den Verlauf wiederspiegelt. Hierbei ist man bestrebt, die beste Approximation der Werte $y(x)$ durch die Funktion $F(x)$ zu erreichen – eine Möglichkeit hierfür ist die *Methode der kleinsten Quadrate*. $F(x)$ ist genau dann eine gute Approximation, wenn die Summe der Abweichungsquadrate minimal ist, d. h. $\sum_{i=1}^{n}(y_i - F(x_i))^2$ ist minimal.

2.5 Verteilungsfunktionen

Für die Häufigkeitsverteilung bietet es sich an, diese durch eine sog. Verteilungsfunktion zu beschreiben. Im folgenden soll auf die drei Verteilungsfunktionen Binominal-, Poisson- und Gauß-Verteilung kurz eingegangen werden.

Ist es bei der Betrachtung eines Objekts einer Menge möglich zu entscheiden, ob dieses ein gewisses Merkmal besitzt (m) oder nicht besitzt ($\bar{m}$) (diskrete, duale Entscheidung) und sind die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $P(m) = p$ sowie $P(\bar{m}) = q = 1 - p$, so ist

$$B_x(N,p) = \binom{N}{x}p^x(1-p)^{N-x} = \binom{N}{x}p^x q^{N-x} \qquad \text{mit } p + q = 1, x \in [0,N] \tag{14}$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei N-maliger Wiederholung das Merkmal m genau x-mal auftritt und wird *Binominalverteilung* mit den Parametern N und p genannt. Mittelwert $E(x)$ und Varianz $V(x)$ lassen sich bestimmen über

$$E(x) = Np \tag{15a}$$

$$V(x) = \sigma^2 = Npq = Np(1-p) \tag{15b}$$

Eine weitere Verteilungsfunktion für diskrete Zufallsveränderliche x ist die POISSON-Verteilung mit dem Mittelwert $E(x) = \langle x \rangle$ als Parameter λ und ist definiert als

$$P_x(\lambda) = \frac{\lambda^x}{x} e^{-\lambda} \quad \text{mit } x \in N, \lambda > 0 \tag{16}$$

Die POISSON-Verteilung geht aus der Binominalverteilung beim Grenzübergang $N \to \infty$ hervor, wenn dabei p so variiert wird, daß $Np = \lambda = const.$ bleibt.

Die Normal- oder Gauß-Verteilung zählt zu den stetigen Verteilungen. Parameter sind der Mittelwert $\mu = E(x) = \langle x \rangle$ und die Varianz σ^2 und die Dichte der Normalverteilung ist bestimmt über

$$G_x(\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{17}$$

An der Stelle $x = \mu$ nimmt sie ihr Maximum an, an den Stellen $\mu \pm \sigma$ liegen die Wendepunkte der Funktion.

Die Chi-Quadrat-Verteilung χ^2 besitzt mit dem Parameter f (Anzahl der Freiheitsgrade = Anzahl der unabhängigen, (0,1)-normalverteilte Zufallsveränderliche) die Dichtefunktion

$$f_{\chi^2}(x) = \begin{cases} \left(2^{\frac{f}{2}}\Gamma\left(\frac{f}{2}\right)\right)^{-1} x^{\frac{f}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases} \tag{18}$$

wobei $\Gamma(x)$ die Gammafunktion mit $\Gamma(x+1) = x!$, $\Gamma(x-1) = x\Gamma(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$ bezeichnet. Erwartungswert (Mittelwert) und Varianz sind bestimmt über

$$E(x) = f \tag{19a}$$

$$V(x) = 2f \tag{19b}$$

Die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq \chi_f^2)$ (X = Zufallsveränderliche) kann als Flächeninhalt zwischen Dichtefunktion und Abzisse im Intervall $]-\infty,\chi_f^2]$ interpretiert werden. Wird die Wahrscheinlichkeit α vorgegeben und gilt $P(X > \chi_f^2)$, so wird die zugehörige Abzisse $\chi_f^2 = \chi_{\alpha,f}^2$ als Quantil bezeichnet und ist definiert durch die Beziehung

$$\int_{\chi_{\alpha,f}^2}^{\infty} f_{\chi^2}(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \tag{20}$$

Mit dem χ^2-Test besteht die Möglichkeit, die Hypothese eines Vorliegens einer bestimmten Verteilungfunktion zu überprüfen. Die Anzahl der Freiheitsgrade bei der χ^2-Verteilung ist hierbei

$$f = n - 1 - p \tag{21}$$

wobei n die Anzahl der Beobachtungsobjekte und p die Anzahl der abhängigen Parameter. Ist der ermittelte Wert $\chi^2 \geq \chi_{\alpha,f}^2$, so wird die Hypothese auf dem Konfidenzniveau mit einer bestimmten Irrtumswahrscheinlichkeit α verworfen, andernfalls gibt es keinen Grund für eine Ablehnung der Hypothese. Eine Verkleinerung des Signifikanzniveaus α hat zur Folge, daß eine wahre Hypothese mit größerer Wahrscheinlichkeit nicht abgelehnt wird, falsche Hypothesen werden weiterhin verworfen – bei einer Vergrößerung des Signifikanzniveaus α vergrößert sich die Wahrscheinlichkeit, eine richtige Hypothese zu verwerfen, auf falsche Hypothesen hat dies den Einfluß, daß die Annahme der Antihypothese sicherer wird.

3. Versuchsdurchführung

Das Programm `Statistik.exe` erzeugt $n = 200$ voneinander unabhängige Zahlen zwischen 0 und 50. Für diese Zahlenmenge soll der Mittelwert [Gl. (3a)], Varianz [Gl. (8b)] und die

Standardabweichung des Einzelwertes [Gl. (8a)] sowie des Mittelwertes [Gl. (9)] bestimmt werden (Aufgabe 3). Für Aufgabe 4 soll geprüft werden, ob es sich um eine Binominal-, Poisson- und/oder Normalverteilung handelt. Hierfür werden die Ergebnisse aus Aufgabe 3 als Schätzwerte für ein oder zwei Parameter der Verteilungsfunktion benutzt und χ^2 bestimmt – die Parameter werden dann solange variiert, bis das minimale χ^2 ermittelt wird. Die Prüfgröße χ^2 ist ein quadratisches Abweichungsmaß der experimentellen Verteilung von der theoretischen (hypothetischen) Verteilung:

$$\chi^2 = \sum_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{(H(x) - np(x))^2}{np(x)} \tag{22}$$

($H(x)$: experimentelle absolute Häufigkeit, $p(x)$ theoretische Wahrscheinlichkeit, x_{min} kleinstmöglicher Wert, x_{max} größtmöglicher Wert). Dabei ist darauf zu achten, daß $np(x) > 4$ ist, andernfalls müssen Gruppen r gebildet werden, für die gilt

$$n \sum_{x=x_a}^{x_e} p(x) > 4 \tag{23}$$

(x_a, x_e Anfangs- und Endwert einer Gruppe). Man setzt für die Gruppe r

$$H_r = \sum_{x=x_a}^{x_e} H(x) \tag{24a}$$

$$p_r = \sum_{x=x_a}^{x_e} p(x) \tag{24b}$$

und für g Gruppen folgt

$$\chi^2 = \sum_{r=1}^{g} \frac{(H_r - np_r)^2}{np_r} \tag{25}$$

Die ermittelte Größe χ^2 wird dann mit dem kritischen Wert $\chi^2_{\alpha,f}$ verglichen und die Haltbarkeit der Hypothese auf dem Konfidenzniveau bestimmt.

4. Meßwerte

Listennummer: 989									
i	$H(i)$	i	$H(i)$	i	$H(i)$	i	$H(i)$	i	$H(i)$
0	0	11	0	21	0	31	0	41	15
1	0	12	0	22	0	32	0	42	16
2	0	13	0	23	0	33	0	43	20
3	0	14	0	24	0	34	0	44	45
4	0	15	0	25	0	35	0	45	41
5	0	16	0	26	0	36	0	46	23
6	0	17	0	27	0	37	1	47	25
7	0	18	0	28	0	38	2	48	3
8	0	19	0	29	0	39	1	49	0
9	0	20	0	30	0	40	8	50	0
10	0								

Tabelle 1: Häufigkeitsverteilung

5. Auswertung

Das Programm `stat.exe` gibt $n = 200$ voneinander unabhängige Pseudozufallszahlen anhand bereits generierter Zahlenlisten aus (Auswahl über die anzugebene Listennummer) und bestimmt die absolute Häufigkeitsverteilung $H(i)$ der Zahlen. Ebenfalls wird von diesem Programm der χ^2-Wert nach Auswahl der zu untersuchenden Verteilungsfunktion und Angabe der Parameter berechnet. Die in Abschnitt 3 beschriebene Gruppenbildung, die für die erhobene Häufigkeitsverteilung notwendig für die Einhaltung der Bedingung nach Gl. (23) war, wurde vom Programm ebenfalls durchgeführt – der Index des letzten Wertes in der ersten Gruppe (i_{min}) sowie der Index des ersten Wertes in der letzten Gruppe (i_{max}) wurde jeweils mit ausgegeben, d. h. die erste Gruppe geht jeweils von $i = 0 \ldots i_{min}$ und die letzte von $i = i_{max} \ldots 50$ und die Anzahl der Gruppen g läßt sich bestimmen über

$$g = i_{max} - i_{min} + 1 \tag{26}$$

5.1 Aufgabe 2

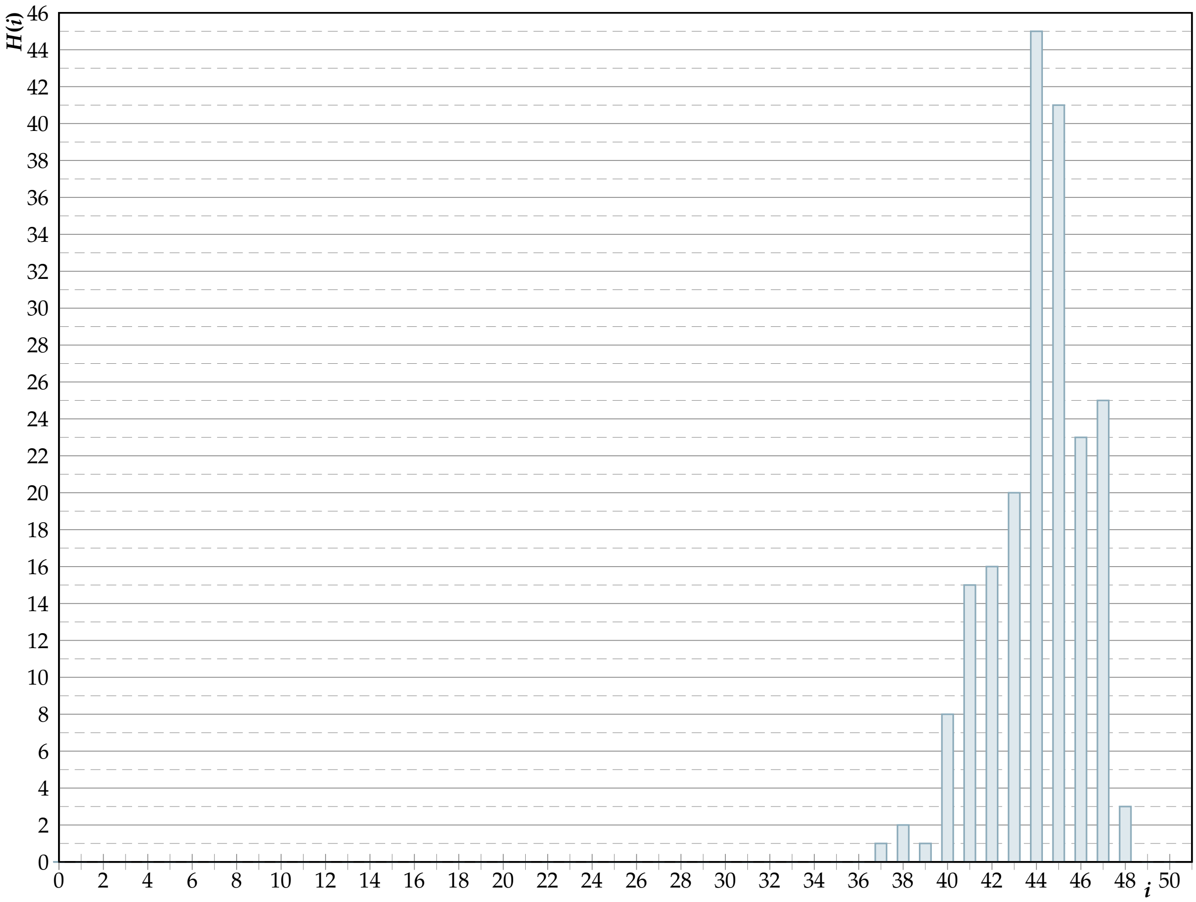

Abbildung 1: Histogramm

5.2 Aufgabe 3

Mittelwert, Varianz, Standardabweichung des Einzelwertes und des Mittelwertes können mit den Werten aus der Häufigkeitsverteilung (Tab. 1) vereinfacht bestimmt werden über:

$$\begin{aligned}
E(i) = \bar{i} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{50} i \cdot H(i) && = 44{,}11 \\
V(i) = \sigma^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{50} H(i)\cdot(i-\bar{i})^2 && = 4{,}5 \\
\sigma_x &= \sqrt{V(i)} && = 2{,}1 \\
\sigma_{\bar{i}} &= \frac{\sigma_i}{\sqrt{n}} && = 0{,}15
\end{aligned}$$

5.3 Aufgabe 4

5.3.1 Test auf Normalverteilung

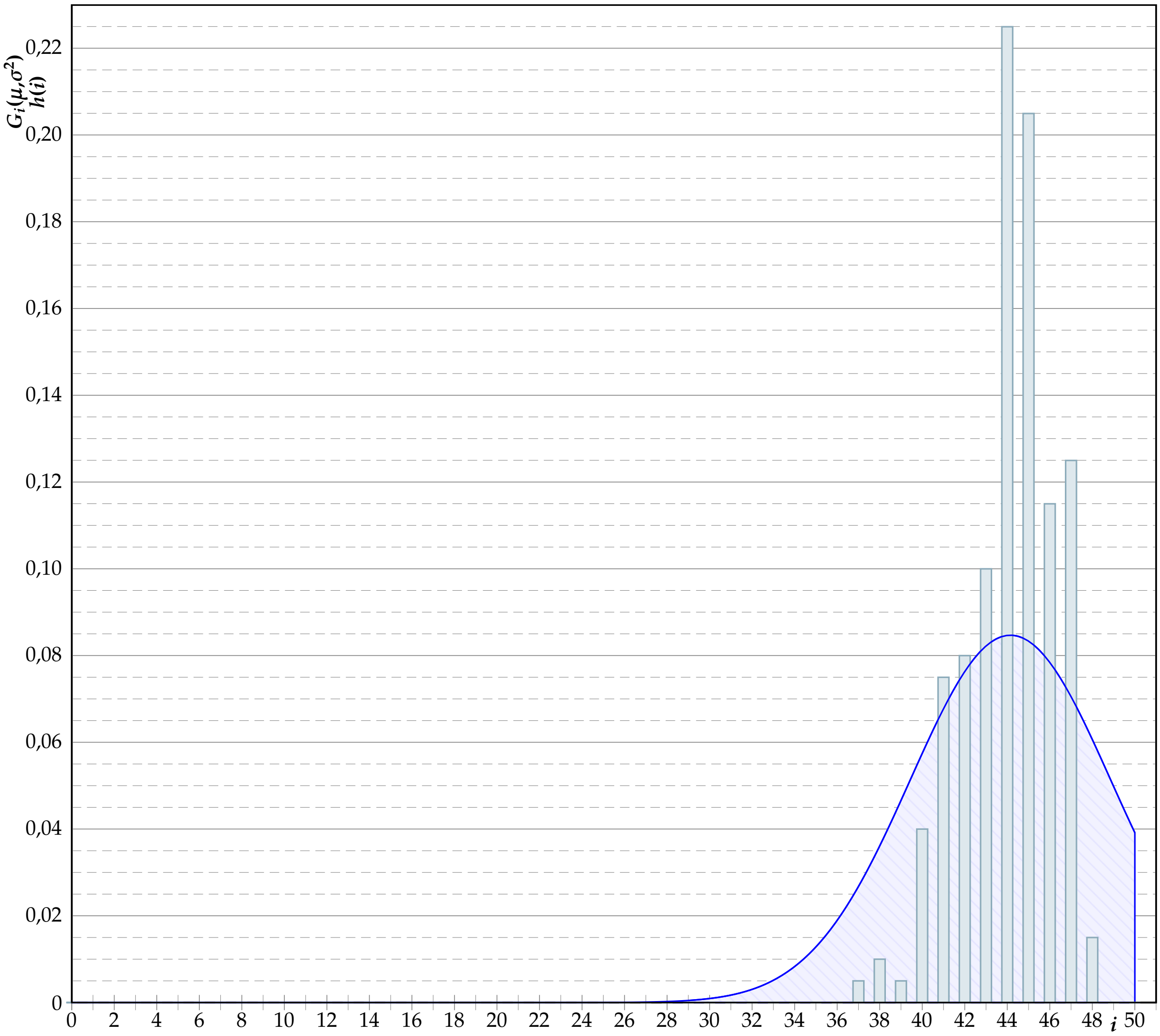

Abbildung 2: Experimentelle relative Häufigkeit mit theoretischer Normalverteilung

Mit den in Aufgabe 3 berechnetem Mittelwert und Varianz wird die Normalverteilung zunächst parametrisiert ($\mu = \bar{i}$, $\sigma^2 = \sigma^2_{theo.}$) und anschließend über Variation von σ^2 und μ ein minimales χ^2 gesucht. Dabei wurde zunächst σ^2 variiert und μ konstant gelassen, bis ein minimales χ^2 gefunden wurde [Abb. 3 a)], anschließend bei konstantem σ^2 der Parameter μ variiert bis zu einem erneuten Minimum [Abb. 3 b)]. Schlußendlich wurde nochmals σ^2 variiert [Abb. 3 c)]. Die ermittelten χ^2-Testwerte sind in Tab. 2 und Abb. 3 wiedergegeben.

μ	σ^2	χ^2	μ	σ^2	χ^2
44,11	4,5	23,94279	44,11	4,69	23,76780
44,11	5,0	24,50824	44,10	4,7	23,86003
44,11	4,0	26,43068	44,12	4,7	23,68415
44,11	4,7	23,76743	44,13	4,7	23,61020
44,11	4,8	23,80709	44,14	4,7	23,54559
44,11	4,6	23,80944	44,15	4,7	23,49031
44,11	4,75	23,77761	44,16	4,7	23,84833
44,11	4,65	23,77765	44,15	4,71	23,48906
44,11	4,71	23,76787	44,15	4,72	23,89471

Tabelle 2: χ^2-Testwerte in Abhängigkeit von $\bar{i}$ und σ^2

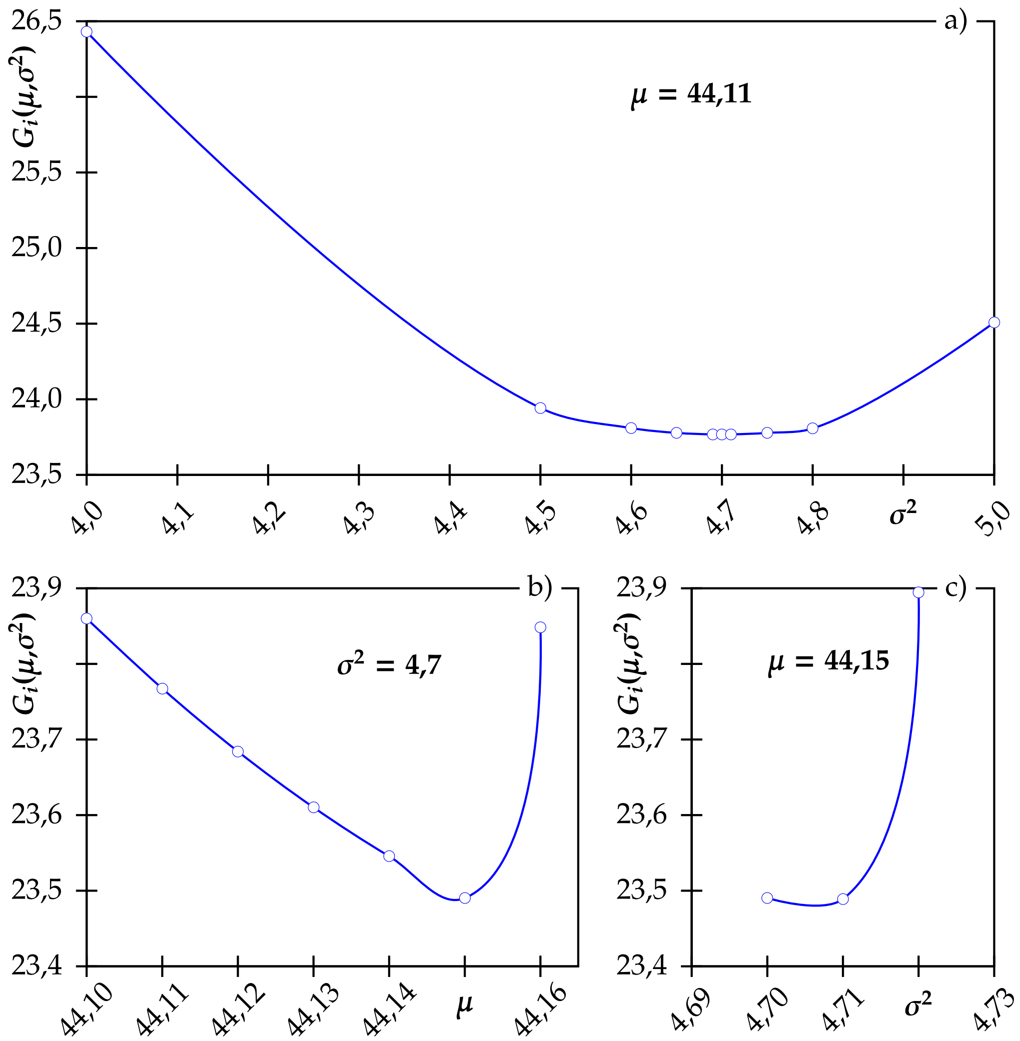

Abbildung 3: $\chi^2(\mu,\sigma^2)$-Diagramme

Bei $\mu = 44{,}15$ und $\sigma^2 = 4{,}71$ liegt der minimale χ^2-Testwert von $\chi^2 = 23{,}48906$ bei einer Gruppenbildung $i_{min} = 40$, $i_{max} = 48$ vor. Für diese beiden Parameter μ und σ^2 wurde die theoretische Verteilung nach Gl. (17) zusammen mit der experimentellen relativen Häufigkeitsverteilung $h(i)$ in das Diagramm 2 eingezeichnet.

Mit Gl. (21), der Gruppenanzahl nach Gl. (26) als Anzahl der Beobachtungsobjekte ($g = 9$) sowie der Anzahl der geschätzten Parameter μ und σ^2, ergibt dies für die Anzahl der Freiheitsgrade

$$f = g - 1 - p = 9 - 1 - 2 = 6$$

Aus [BSMM05, S. 1124] wurden die entsprechenden Werte für die Quantile $\chi^2_{\alpha,f=6}$ entnommen und sind in der Tabelle 3 mit der Aussage über der Hypothese wiedergegeben.

α	$\chi^2_{\alpha,f=6}$	χ^2	**Aussage**
0,05	12,6	23,5	Die Hypothese einer Normalverteilung wird verworfen.
0,01	16,8	23,5	Die Hypothese einer Normalverteilung wird verworfen.

Tabelle 3: Aussage über die Normalverteilungshypothese

5.3.2 Test auf Poisson-Verteilung

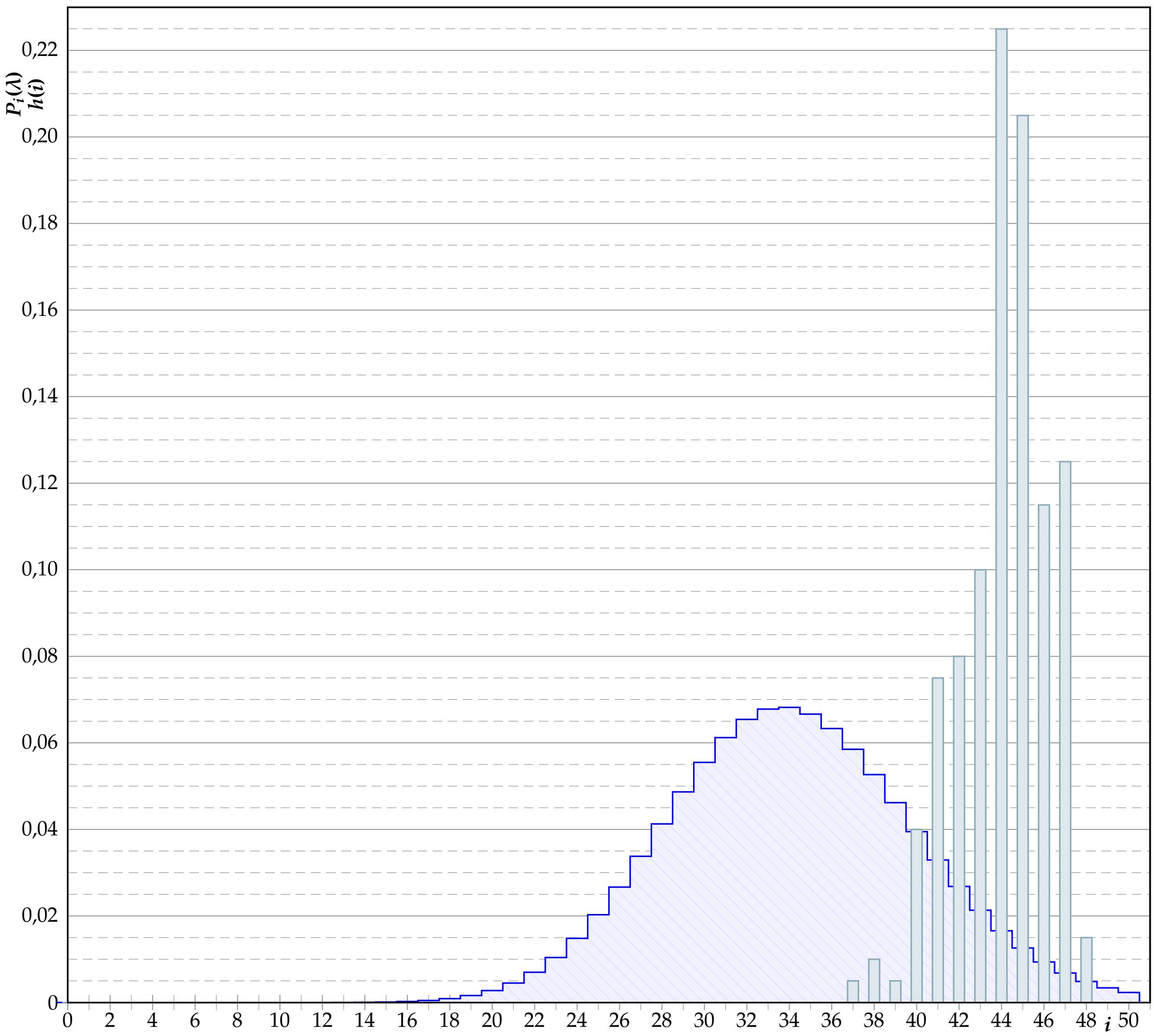

Abbildung 4: Experimentelle relative Häufigkeit mit theoretische Poisson-Verteilung

Die Poisson-Verteilung wird nur mit einem Parameter λ parametrisiert. Als Startpunkt für die Suche dieses Parameters wurde der Mittelwert $\bar{i}$ verwendet, die mit dem Statistik-Programm ermittelten Werte für χ^2 sind in der Tab. 4 und Abb. 5 wiedergegeben.

λ	χ^2	λ	χ^2
44,1	5427,708	30,0	3543,066
45,0	6868,619	32,5	2761,342
46,0	4589,760	34,0	2639,462
47,0	6398,848	33,0	2697,334
45,5	7866,853	33,5	2657,179
42,5	6924,144	33,8	2643,923
43,0	7708,440	34,2	2638,450
41,0	5159,531	34,3	2639,227
35,0	2668,451	34,1	2638,527

Tabelle 4: χ^2-Testwerte in Abhängigkeit von λ

In Abb. 5 erkennt man, daß mehrere lokale Minima vorliegen, im näheren Umfeld des zunächst geschätzten Parameters $\lambda = \bar{i}$ liegen zwei lokale Minima vor, bei wesentlich kleineren λ-Werten existiert jedoch ein wesentlich geringes Minima.

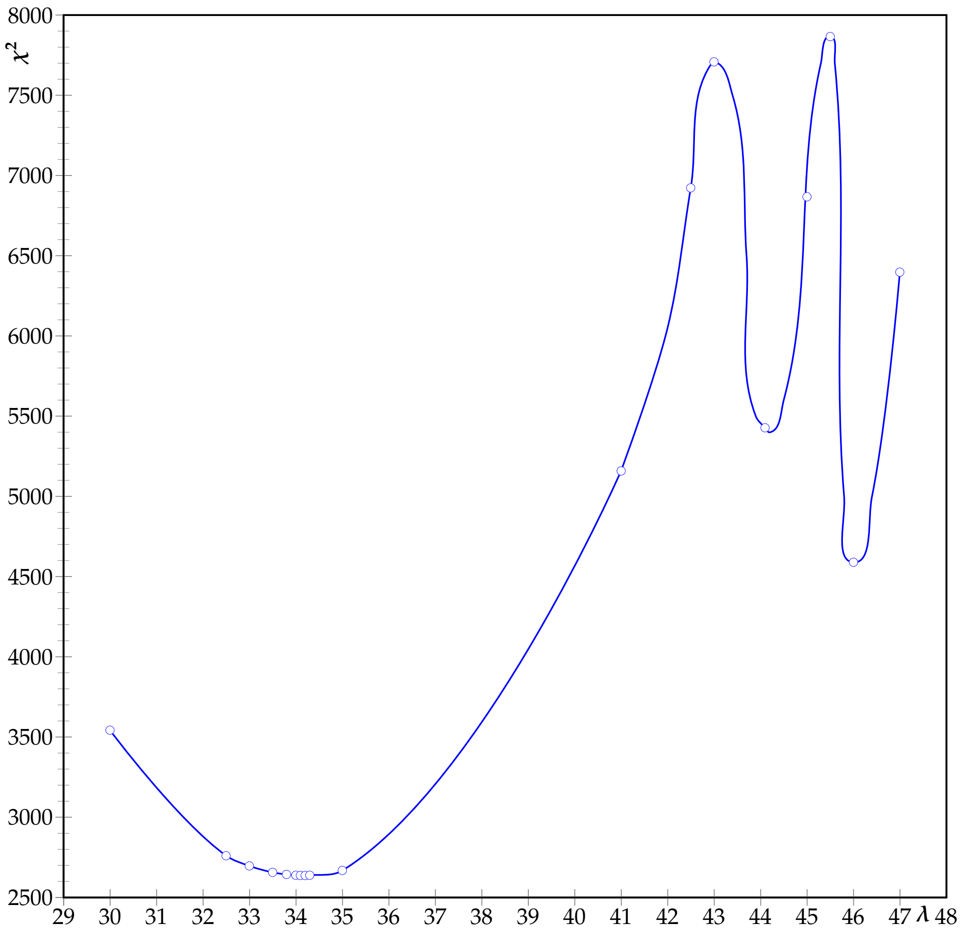

Abbildung 5: $\chi^2(\lambda)$-Diagramm

Bei $\lambda = 34{,}2$ wird der minimale χ^2-Testwert von 2638,450 erreicht – mit der Gruppenbildung $i_{min} = 23$, $i_{max} = 34$, was einer Gruppenanzahl nach Gl. (26) von $g = 12$ entspricht. Für das ermittelte λ wurde die theoretische Verteilung nach Gl. (16) zusammen mit der experimentellen relativen Häufigkeitsverteilung $h(i)$ in das Diagramm 4 eingezeichnet.

Irritierend ist einerseits die Lage des Parameters λ, andererseits die Gruppenbildung des verwendeten Auswerteprogramms – nach Gl. (23) können die Grenzen an den angegebenen Stellen nicht liegen. Ob hier irgendein Berechnungs- oder Logikfehler im Auswerteprogramm vorliegt, wurde – aufgrund des fehlenden Vorliegens des Quelltextes und, da sowohl bei dem erwarteten λ-Wert in Bereich des Mittelwertes $\bar{i}$ sowie auch beim λ-Wert bei minimalen χ^2, der χ^2-Wert weit oberhalb der erforderlichen Quantilen $\chi^2_{\alpha,f}$ für das zu prüfende Konfidenzniveau liegt – nicht weiter eruiert.

Mit Gl. (21), der Gruppenanzahl $g = 12$ als Anzahl der Beobachtungsobjekte sowie der Anzahl der geschätzen Parameter (nur Parameter λ wurde geschätzt), ergibt dies für die Anzahl der Freiheitsgrade

$$f = g - 1 - p = 12 - 1 - 1 = 10$$

Aus [BSMM05, S. 1124] wurden die entsprechenden Werte für die Quantile $\chi^2_{\alpha,f=10}$ entnommen und sind in der Tabelle 5 mit der Aussage über der Hypothese wiedergegeben.

α	$\chi^2_{\alpha,f=10}$	χ^2	Aussage
0,05	18,3	2638,5	Die Hypothese einer Poissonverteilung wird verworfen.
0,01	23,2	2638,5	Die Hypothese einer Poissonverteilung wird verworfen.

Tabelle 5: Aussage über die Poissonverteilungshypothese

5.3.3 Test auf Binominal-Verteilung

Bei der Prüfung auf die Binominal-Verteilung wurde der Parameter N (Anzahl der Elementarereignisse) fest gehalten ($N = 50$) und der Parameter p variiert. Da die Häufigkeitsverteilung stark zu den höheren N-Werten verschoben ist, wurde ein p-Wert im höheren Bereich vermutet, da bei der Binominal-Verteilung bei einem p-Wert von 0,5 die Wahrscheinlichkeit symmetrisch zum Median von N liegt, bei p-Werten $< 0{,}5$ die Wahrscheinlichkeit zu kleineren N-Werten verschoben ist und bei p-Werten $> 0{,}5$ zu den höheren N-Werten. In der Tab. 6 und Abb. 7 (mit Ausschnittsvergrößerung des Bereiches von $p = 0{,}88350 \ldots 0{,}88375$) sind die χ^2-Testwerte in Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeit p wiedergegeben, die mit dem Statistik-Programm für die Suche von p mit minimalen χ^2 ermittelt wurden.

p	χ^2	p	χ^2
0,80	908,790019	0,883	19,162475
0,75	2570,000778	0,8835	19,122032
0,85	109,750571	0,8837	19,119271
0,86	70,166567	0,88375	19,119785
0,87	36,569544	0,88365	19,119239
0,88	20,386643	0,88363	19,119361
0,89	22,929839	0,88367	19,119194
0,885	19,291157	0,88368	19,119200

Tabelle 6: χ^2-Testwerte in Abhängigkeit von p

Bei $p = 0{,}88367$ erhält man – bei einer Gruppenbildung $i_{min} = 39$ und $i_{max} = 48$, d. h. nach Gl. (26) eine Gruppenanzahl von $g = 10$ – den minimalen χ^2-Testwert von $\chi^2 = 19{,}119194$. Für diesen p-Wert wurde die theoretische Verteilung nach Gl. (14) zusammen mit der experimentellen relativen Häufigkeitsverteilung $h(i)$ in das Diagramm 6 eingezeichnet.

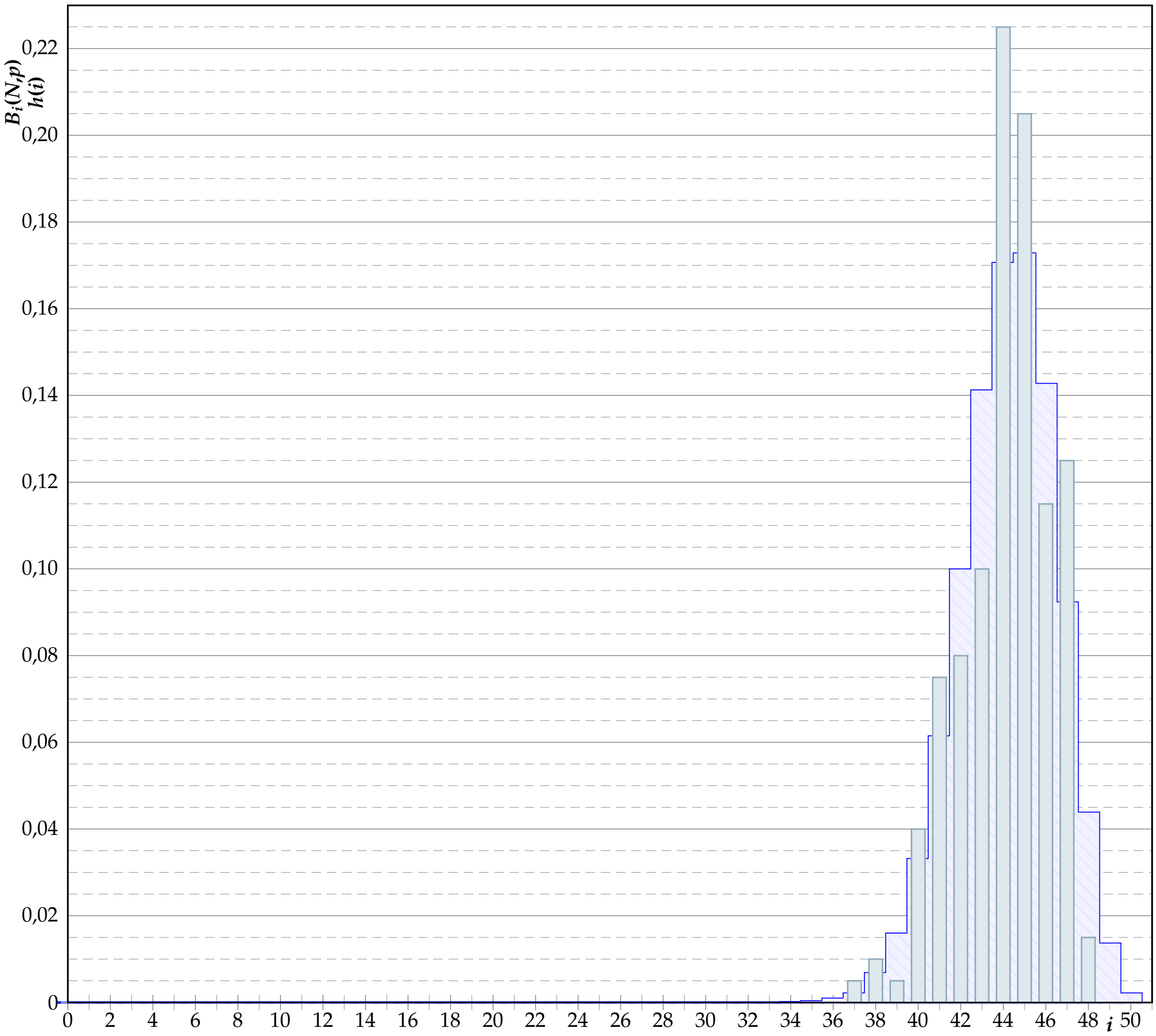

Abbildung 6: Experimentelle relative Häufigkeit mit theoretischer Binominal-Verteilung

Mit Gl. (21), der Gruppenanzahl $g = 10$ als Anzahl der Beobachtungsobjekte sowie der Anzahl der geschätzen Parameter (nur Parameter p wurde geschätzt), ergibt dies für die Anzahl der Freiheitsgrade

$$f = g - 1 - p = 10 - 1 - 1 = 8$$

Aus [BSMM05, S. 1124] wurden die entsprechenden Werte für die Quantile $\chi^2_{\alpha,f=8}$ entnommen und sind in der Tabelle 7 mit der Aussage über der Hypothese wiedergegeben.

α	$\chi^2_{\alpha,f=8}$	χ^2	**Aussage**
0,05	15,5	19,1	Die Hypothese einer Binominalverteilung wird verworfen.
0,01	20,1	19,1	Die Hypothese einer Binominalverteilung ist haltbar.

Tabelle 7: Aussage über die Binominalverteilungs-Hypothese

6. Ergebnis

Untersucht wurde die Pseudozufallszahlenliste 989. Als Mittelwert konnte ein Wert von $\bar{i} = 44{,}11$ mit einer Varianz von $\sigma^2 = 4{,}5$, einer Standardabweichung des Einzelwertes von $\sigma_i = 2{,}1$ sowie der Standardabweichung des Mittelwertes von $\sigma_{\bar{i}} = 0{,}15$ ermittelt werden. Auf

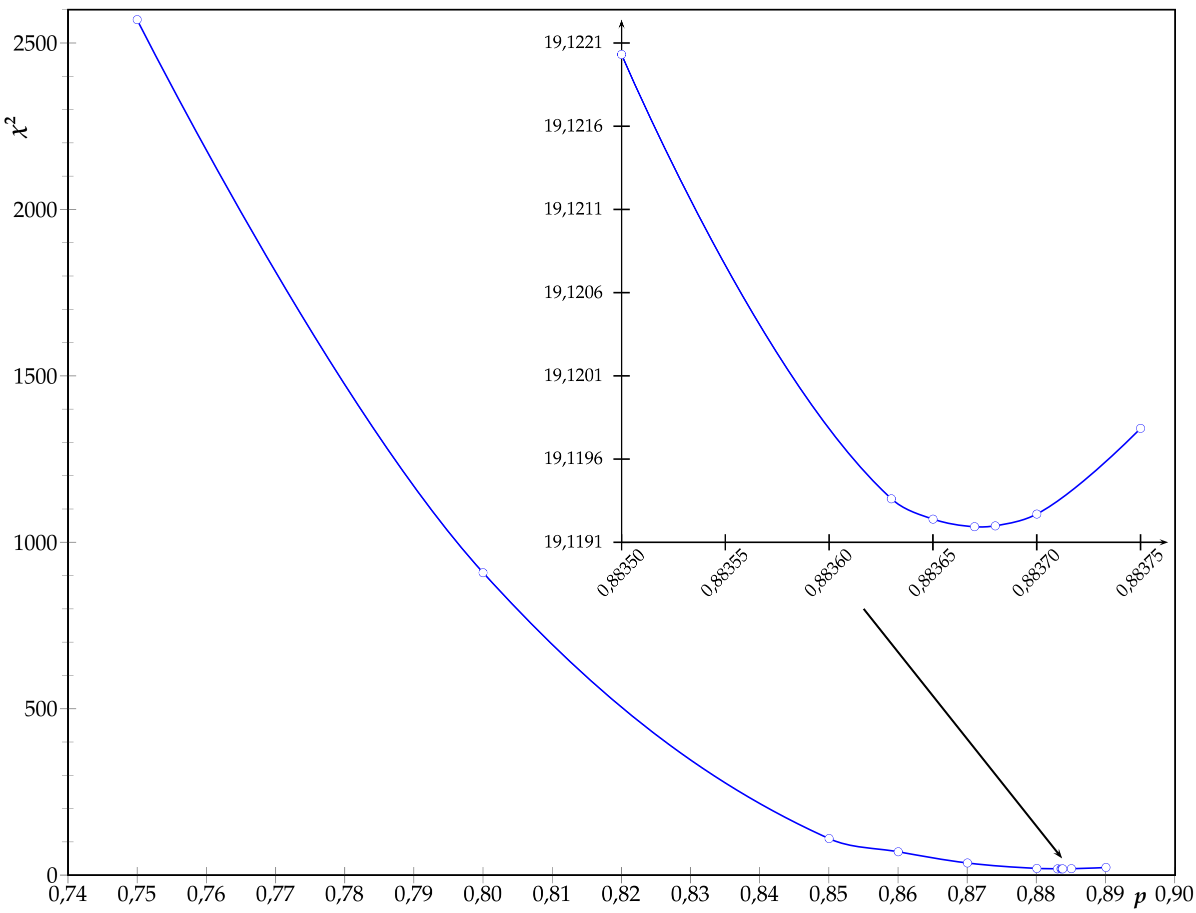

Abbildung 7: $\chi^2(p)$-Diagramm

dem Konfidenzniveau $1 - \alpha = 95\%$ konnte keine der drei getesteten Hypothesen (Vorliegen einer Normal-, Poisson- sowie Binominalverteilung) gehalten werden, bei einem Konfidenzniveau von 99% war die Hypothese einer Binominalverteilung haltbar, die der anderen beiden untersuchten Verteilungen (Normal- und Poissonverteilung) nicht haltbar.

Die Verständlichkeit der Arbeitsweise des verwendeten Statistikprogramms war teilweise nicht intuitiv gegeben (insbesondere die Art und Weise der Gruppenbildung war zunächst nicht eindeutig gegeben und mußte näher eruiert werden). Zudem stürzte das Programm am Durchführungstag häufiger ab. Dem Aushilfsbetreuer war die Arbeitsweise des Programms ebenfalls nicht ganz geläufig, zudem wurde die Anforderung, daß der Verlauf der minimalen χ^2-Ermittlung festgehalten werden sollte, erst zum Ende gestellt. Daher wurde die Prüfung daheim in der Versuchsauswertung mit dem Programm nochmals durchgeführt (zusammen mit der Eruierung der Gruppenbildung) und der Verlauf festgehalten.

Literatur

[BSMM05] Bronstein, I. N. ; Semendjajew, K. A. ; Musiol, G. ; Mühlig, H.: *Taschenbuch der Mathematik*. 6., vollständig überarbeitete und ergänzte Auflage. Frankfurt am Main : Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH, 2005. – ISBN 3–8171–2006–0

[BWB+04] Bossek, Dr. H. ; Weber, Prof. Dr. habil. K. ; Baeger, Armin ; Brückner, Dr. Georg-Christian ; Gräf, Frank ; Kantel, Irmhild ; Messner, Ardito ; Schmidt, Dr. M. ; Schmitz, Dr. habil M. ; Wernicke, Dr. habil. B. ; Zillmer, PD Dr. habil. W. ; Bossek, Dr. H. (Hrsg.) ; Weber, Prof. Dr. habil. K. (Hrsg.): *Mathematik*. 1. Auflage. Mannheim : PAETEC Gesellschaft für Bildung und Technik mbH, Berlin und Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG, 2004 (Duden – Abiturwissen). – 464 S. – ISBN 3–411–00219–0

[Han06] Handl, Andreas: *Einführung in die Statistik mit R*. http://www.wiwi.uni-bielefeld.de/~frohn/Mitarbeitr/Handl/statskript.pdf. Version: Sep. 2006

[KS56] Kaiser, Heinrich ; Specker, Hermann: Bewertung und Vergleich von Analysenverfahren. In: *Zeitschrift für analytische Chemie* 149. Band (1956), S. 46 – 66

[Kuc94] Kuchling, Horst: *Taschenbuch der Physik*. 14. Auflage. Leipzig-Köln : Fachbuchverlag, 1994. – ISBN 3–343–00858–3

[Mey06] Meyer, Dirk: Physikalisches Praktikum für Studierende der Physik / Ruhr-Universität Bochum. 4. Auflage. 2006. – Versuchsanleitungen

Liste der Versionen

Version	Datum	Bearbeiter	Bemerkung
0.9	28.10.2007	Krä	Versuchsvorbereitung
1.0	30.10.2007	Krä	Versuchsdurchführung
1.1	04.11.2007	Krä	Versuchsauswertung